IV

Mechanika 1899/1900

Ann. d. Phys. **35**, 591, 911; Wo. Ostwald, Ann. d. Phys.

…26, 848, 1912.

den Wert $\overline{\Delta} = \frac{1}{4}\frac{H\Theta}{N}$ erhält. Die Dichteunterschiede werden daselbst sogar für mikroskopisch sichtbare Volumteile verhältnismäßig groß, so daß die Opaleszenz in eine weißliche Trübung übergeht.

Von theoretischem Interesse ist es, zu bemerken, daß ganz analoge Tyndallsche Phänomene auch bei Schallfortpflanzung auftreten müssen, nur ist hier der Einfluß der Inhomogenitäten wegen der Größe der Wellenlänge weit geringer als bei Lichtwellen; sie setzen eine Grenze für die überhaupt praktisch zu verwirklichenden akustischen Erscheinungen kurzer Wellenlänge.

Diese zufälligen Inhomogenitäten müssen auch bei der kinetischen Theorie der Zustandsgleichung berücksichtigt werden, und ich habe schon vor längerer Zeit an der Hand der van der Waalsschen Theorie darauf aufmerksam gemacht, daß sie insbesondere in der Nähe des kritischen Zustandes die unter Voraussetzung eines homogenen Mediums abgeleitete Zustandsgleichung erheblich modifizieren können.

§ 12. Eine praktisch wohl kontrollierbare Konsequenz möchte ich noch erwähnen, die sich auf die automatisch auftretenden Konzentrationsunterschiede von Gemischen bezieht. Es scheint mir nämlich, daß sich ein direkter experimenteller Nachweis wohl erbringen ließe, und zwar bei sehr verdünnten Lösungen radioaktiver Stoffe oder bei gasförmiger Emanation, bei welcher ja die Zählung einzelner Atome ermöglicht ist.

Einen derartigen Versuch hat auch bereits Svedberg[1]) unternommen, aber wie mir scheint, nicht mit Erfolg. Bekanntlich hat Schweidler den Gedanken ausgesprochen, daß dieselbe Formel (2), welche die Veränderlichkeit der Molekülzahl eines idealen Gases charakterisiert, sich ebenso auf die Anzahl der radioaktiv zerfallenden Atome bezieht, und Bateman hat ebenso die Formel (8) hierfür begründet[2]). Es ist dies zwar eine Er-

1) Th. Svedberg, Arkiv f. Kemi, Mineral. och Geol., Upsala 4, Nr. 22, 1911; 4, Nr. 25, 1912. Siehe auch K. Herzfeld, Phys. Zeitschr. 13, 547, 1912. Die Unrichtigkeit der Überlegung Svedbergs wird wohl am einfachsten durch die Analogie mit folgendem Beispiel erklärt: Entfallen auf ein Volum v_1 eines idealen Gases im Mittel ν_1 Moleküle, so schwankt deren Anzahl im Mittel um $\sqrt{\nu_1}$, trotzdem daß man dieselben als Teil eines größeren Ganzen vom Volumen v_2 auffassen kann, daß somit auch die Zahl ν_1 Schwankungen im Betrage von $\nu_1\sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}}$ aufweisen muß. Der Zahl ν_2 entspricht bei Svedberg die mittlere Anzahl der im betrachteten Teil der Lösung befindlichen radioaktiven Atome, der Zahl ν_1 die Anzahl derjenigen darunter, welche im bestimmten Zeitraum zerfallen.

Interessant ist auch eine von E. Meyer [diese Zeitschr. 11, 215, 1910] nachgewiesene Schwankung des Stromes, der durch ionisierte Luft zwischen zwei nahe auf das Entladungspotential gebrachten Elektroden übergeht. Dieselbe läßt sich auf die Veränderlichkeit der mittleren Weglänge zurückführen. Es gehört dies jedoch ebenfalls nicht zu den hier behandelten Gleichgewichtsphänomenen. Siehe ferner: K. Herzfeld, diese Zeitschr. 13, 547, 1912.

2) E. v. Schweidler, Congr. Radiolog. Liège 1905. S.; H. Bateman, Phil. Mag. 20, 704, 1910.

1

Mechanika

letnie 1899

i zimowe 1899/1900

Termodyn., nauka o cieple; ~~???~~ [najstarsza] podstawowa część fizyki, bo matematyczne wywody w niej najprostsze.

2

~~???~~ Fundamentalne pojęcia: Temperatura, ilość ciepła, energia, entropia, potencjał, praca ~~z~~ wszystko wielkościami skalarnemi. Do tego [przeważnie] ograniczenie do stanów równowagi; [chemiczny, ilość ...]

~~Rachunek~~ [Analiza] skalarna wiele łatwiejsza dla [pojęcia] wyobraźni aniżeli wektorowy,

Dla tego łatwiejsza niż mechanika, elektryka.

Rzucimy okiem na obszar i rozkład przedmiotu.

Jakie wogóle ~~cel~~ [zadanie] fizyki teoretycznej?

Najrozmaitsze odpowiedzi na to pytanie i wielkie dyskusye na ten temat, chociaż nie myślę żeby którykolwiek [większy] fizyk był w wątpliwości co do zadania swego fachu.

Tylko rozmaite sposoby wystawiania tej samej zasadniczej myśli i powtóre różnice w metodach.

Dawniej powszechnie mówiono że zadanie: opisywać zjawiska przyrody (~~lub~~ martwej przyrody) i wytłomaczyć je. (Nawet w tem znajdywano różnicę metody nauk przyrodniczych [tylko] opisowych).

Kirchhoff podał [pozornie] zupełnie inne zadanie: ~~u~~ opisywać zjawiska przyrody w najprostszy sposób (więc bez „tłomaczenia"). Pozornie wielka różnica.

Przypatrzymy się raz takiemu tłomaczeniu!

Kamień spada $m\frac{dv}{dt} = mg$

Tłomaczymy to działaniem siły ciężkości

Ale czy to jest tłomaczenie? Co to jest siła, jak ją poznajemy?

Właśnie tylko wywołaniem przyspieszenia! Więc jest to czysto określenie

2

Taki sam jak w sławnej scenie Malade imaginaire Moliera, gdzie kandydatowi przy egzaminie stawiają pytanie: Czemu opium działa usypiająco? 3

Odpowiedź za celującą uznano: Bo posiada ~~[illegible]~~ zdolność usypiającą.

Ale w naszym przypadku nie jest to tak całkiem bez sensu powiedziane, w powiedzeniu: że istnieje siła ciężkości tkwi skonstatowanie faktu że to spadanie kamieni nie jest faktem przypadkowym lecz regularnym że zawsze w tych warunkach następuje taki sam ruch.

Ale nie jest to podanie przyczyny lecz skonstatowanie

Właściwie wychodzi to więc na jedno i to samo czy powiemy: ciała nie podparte spadają na ziemi zawsze w ten sposób, że posiadają przyspieszenie jednostajne w kierunku pionowym wielkości g, czy też powiemy po prostu: istnieje siła ciężkości. Jedno i drugie właściwie nic nie jest jak skonstatowaniem faktu, jak „opis" zjawiska spadania (przy czem oczywiście słowo „opis" w nieco innem znaczeniu).

Tak samo mówiono dawniej: Newton „wytłumaczył" ruchy planet okazując za ich przyczynę grawitację. Kirchhoff mówi: Ruchy planet zostały opisane przez Keplera... a równoczesny opis jest Newtona istnienie ~~[illegible]~~ przyspieszenia ..... lub siły — to ostatnie powiedzenie jest prostsze w ogóle najprostszy sposób.

Podobnie np. możemy opisać „in extenso" wszystkie zjawiska elektr., albo objąć je jednym systemem równań Maxwella: To najprostszy sposób.

Tak dalece więc zgoda z Kirchhoffem.

~~[illegible]~~ Inne sposoby poj. –

Mach: zadanie: znaleźć związek między rozmaitemi okolicznościami, które określają zjawisko, od warunków jego stawania się [i zmiany], związek między zjawiskami.

Najlepiej wyrazimy związek taki w formie matematycznej [Najprostszej i najogólniejszej $\varphi(\alpha \beta \gamma \ldots) = 0$]

Np. właśnie owe równania różniczkowe $\frac{d^2s}{dt^2} = g$

Idealną metodą fizyki według Macha jest zatem metoda fenomenologiczna: opis zjawisk fiz. zapomocą równań matemat. i sprowadzenie tych równań do najprostszej [i najogólniejszej] formy. Ale ostatecznie związek taki można by też w inny sposób wyrazić jak równaniami.

Boltzmann: wykombinowanie, skonstruowanie mechanizmów, które ~~dostarczają wyobrażenia~~ dają nam obraz zjawisk przyrody. Zmniejszone modele; Zbudowawszy model ~~[illegible]~~ statku w zmniejszonych rozmiarach możemy próbować jak on będzie się zachowywał podczas ruchu w wodzie i wnioskować z tego na statek szczegóły. Ale nie trzeba słowa model brać w tak ciasnym znaczeniu.

Takiemi modelami są ~~przedewszystkiem~~ rozmaite mechanizmy zjawisk

N.p. teorya emis. [i undul.] światło tak się zachow. jak gdyby było zjawiskiem undulacyjnem

Kto chce niech sobie wierzy że rzeczywiście istnieje eter i że jego falowania rzeczywiście są światłem, ale co do tego ~~nic~~ [co więcej] nie wiemy i wiedzieć nie możemy. Tylko wiemy że się tak zachowuje jak gdyby... ; to nam wystarczy; możemy wnioskować z tego o rozmaitych zjawiskach świetlnych odb. interf. – które pewne nastąpić powinny

Tak samo modele [prąd] elektryczności.

Historya nauki uczy nas że zmienialiśmy często zapatrywania co do tych teoryi. Teorya emis., undulat., elektr., zupełnie inne modele mechanizmu, ale zawsze postęp w tem że się więcej zbliżają w [fakt] działaniu do rzeczywistości i że szerszy mają okres zastosowania (~~Tak samo jak~~ ~~[illegible]~~). Nie będziemy żałować tych przewrotów tylko z zadowol. witać każdy postęp tak jak: kareta pocztowa, parowa kolej, ekspresy, kolej elektr., konstrukcye zupełnie różne ale podobnie itd. a postęp w przystosowaniu do celu.

Te trzy ~~rodzaje~~ określenia nie są istotnie różne: wszystko można podciągnąć pod Kirchhoffa. Także Boltzmanna obrazy i mechanizmy obejmują równania różniczkowe bo i to jest mechanizm ~~[illegible]~~ [illegible] podobnie jak [illegible] a podobnie Macha zwolennicy mozoły wszczynają na —

Ale oczywiście jest tu ~~[illegible]~~ wyraźna już predylekcya Macha do metody fenomenologii, Boltzman. do mechanizmów.

Obie metody ogromnie cenne i do najdonioślejszych doprowadziły wyników i zdobyczy naukowych.

Bo co ~~jest [illegible]~~ zyskaliśmy ostatecznie znalezieniem takich układów lub model? Nie tylko że wszystkie znane fakta z owej dziedziny nam objęte i przejrzyste; znajomość ich uzupełniona, ale też [jest to środkiem do] ~~[illegible]~~ przewidywania konsekwencyi, wychodzących poza to co było wiadomem (oczywiście to zawsze tylko z niepewnością).

5
6

I jedna i druga metoda nadużywaj, płodne w takie wnioski:

Np. równania hydromechaniki, rozmaite z nich konkluzye, ruch falowy etc.

sprężystości

elektrostatyka na podstawie Coulomba etc.

zwłaszcza jednak termodynamika płodna w takie wnioski

Z drugiej strony mechanizmy, modele:

Ciepło jako płyn: Fourier, - - -

Elektr. jako płyn: prądy elektr.

Teorya molekul: Navier, Poisson równania sprężystości

Mechan. teorya eteru: Maxwell równ. elektr.

Kinet. teorya gazów: Równania stanu, tarcie wewn., przew., dyf. etc. etc.

Według tego podział: ~~Na pierwszą~~ Jako Taką termodyn. oddzielamy

fenomenologiczną część; objęcie praw zjawisk cieplnych zapomocą równań i zastosowanie

ich do najróżniejszych przypadków, bez robienia hipotez co do natury ciepła konstytucyi molekularnej i na ~~te~~

od tych części, które polegają na hypotezie że ciepło = energia ruchu śród molekularn.

Tę ostatnią: kinet. teoryę materyi pozostawiamy na II półrocze; to będzie wywód

mechanizmu i wniosk - - według Boltzm.-Maxwell

~~Co prawda zaś i o termodyn. nie obchodzi się bez drogów i hipotez przy rozmaitych przemiana~~

z fizyk. Pierwszą część znów według oddzielmy według fundamentalnego

W pierwszych podział na ~~fizyk~~ termodyn. zjawisk odwracalnych (statykę) i nieodwracaln (kinetykę)

Lód w wodzie 0°; zmiany stanu skupienia, równowagi chemiczne, itd.

Odwrócen. temp. i promieniow.; przy których zaczyna następuje zerow. należą do kinet.

Te kwestye wchodzą stale we wszystkie dziedziny życia społecznego, niestety wszędzie pierwszą swą rolę odgrywa, i tak samo w fizyce wszystkie zjawiska mają także stronę energetyczną, i z tego punktu widzenia często do bardzo pięknych prawideł dochodzimy.

Odkrycie i zastosowanie ~~tych~~ [omawianych] ~~...~~ dróg nam istotnie ogromnie przyczyniło się do objaśniania rozmaitych zjawisk i do ujęcia ich ~~...~~ w ogólne prawa.

Powstał nawet w fizyce kierunek energetyki: dążenie sprowadzenia wszystkiego pod ten jedyny punkt widzenia. Ci energetycy, na których czele stanął Ostwald, zaprzeczają istnieniu materyi, a również także eteru, porzucają pojęcia te tak samo jak pojęcie siły, jak systemy atomistyczne i.t.d. i uważają za jedyne co w świecie istnieje energię, a za treść fizyki poznawanie rozmaitych jej ~~form~~ [sposobów] ~~przemian~~ ~~...~~ przemian.

Nie uważam znów tego fanatyzmu energetycznego za usprawiedliwionego. Sądzę że tak samo jak w życiu społecznem (służenie obrotu) ~~...~~ pieniężnego nie wyczerpuje całej [jego] treści, tak samo w fizyce ten jednostronny kierunek (— o ile dąży do zwalczania innych sposobów zapatrywania) jest chybiony. Istotnie przeminęła ta [moda i już częściowo,] mało jest obecnie takich fanatyków energetyków, do czego głównie zapewne się przyczyniła kompromitacja Ostwalda samego, który wręcz proroktował rychły upadek teoryi atomistycznych, a tymczasem musiał dożyć ~~tego iż~~ (szybkiego rozwoju opisu) dawnych teoryi atomistycznych materyi jeszcze [nawet] powstania i znakomitego rozwoju nowej teoryi atomistycznej elektryczności — elektronów.

Fizyka teoret. w 3 latach, termod., mech., elektr.
Nauka o zjawiskach cieplnych

Rzućmy okiem na obszar tego przedmiotu

Nadzwyczaj rozległy, wchodzi w zakres wszystkich innych gałęzi fizycznych

Bo nie ogranicza się wcale wyłącznie ~~[illegible]~~ do zjawisk zmian temperatury

Wszelkiego rodzaju zjawiska fiz. albo bezpośredn. połączone ze zjawisk. cieplnemi albo w ścisłej zależności od takich zjawisk

Dwa nadzwyczaj ważne ogólne prawidła:

1. Pojęcie energii i zasada zachowania energii

2. Zasada Carnota-Clausiusa

~~Mianowicie~~ Każde ciało, każdy układ fiz. posiada pewną energię, która przybrać może ~~[illegible]~~ rozmaite formy, ale zawsze dąży do zamieniania się w energię cieplną.

Ilość ciepła którą by można wydobyć z ciała tego samego przez się, jeżeli wszystko zostanie zebrane = jego energja. Drugie prawo odnosi się do ~~[illegible]~~ rozstrzygnięcia jakie zmiany energii są możliwe.

Porównanie z innej dziedziny:

Każdy przedmiot nas otaczający posiada pewną wartość t. j. gdyby się go sprzedało toby za niego można dostać pewną ilość pieniędzy. Różnica w porówn. z energją cieplną tylko ta że ~~tu~~ w fizyce mamy ściśle określoną wielkość, podczas gdy w życiu codziennem za wartość starego płaszcza ~~[illegible]~~ mogę wziąć 3 fl. a żyd da mi tylko 1 fl.

Pominąwszy tę ważną różnicę możemy także pracy życia codziennego badać z punktu widzenia wyłącznie finansowego — jak się to dzieje w ekonomii politycznej — co byłoby nam analogią z badaniami fizycznemi z punktu widzenia energetycznego.

Naturalnie, że mówię tu tylko przeciwko ubóstwianiu energii (tego co jako jedynie ~~i metod energetycznych~~) rzeczywiście ~~istniejącej~~ i metod energet. jako jedynie usprawiedliwionych, ale bynajmniej nie myślę zaprzeczać zasługom Ostwalda i umniejszać jego na polu pożytecznego rozwoju tych metod. Dużo tu już dokonano ale dużo jeszcze pozostaje do zrobienia.

Stanowczo wchodzi tu w rachubę bardzo ważne odróżnienie zjawisk odwracalnych i nieodwracalnych lub jak się też wyrazić można statyki i kinetyki termodynamicznej, które zupełnie analogiczne jest do różnicy stanów równowagi i ruchu ~~statyki i kinetyki~~ w mechanice.

Topienie lodu przykład pierwszego rodzaju: ~~kawał~~ kawał lodu 0° w wodzie 0° w równowadze, ~~[illegible]~~ nie zmienia się. Przy nieznacznym doprowadzeniu ciepła topi, przy odprow. krzepn.: proces odwracalny. ~~[illegible]~~ Do tego samego rodzaju należą ogół zmiany stanu skupienia (z wyjątkiem zjawisk przechłodzenia etc.!) i wiele zjawisk zachodzących więcej w zakresie chemii jak różne rodzaje dysocyacyi, tworzenie się wodzianów etc.

Przykład drugiej klasy: rozchodzenie się ciepła w ~~ciele~~ ciele którego jeden koniec cieplejszy niż drugi. Tak samo promieniowanie ciepła i wiele innych.

Otóż dotychczas w ogólny schemat ujęto za pomocą energet. dwóch zasad tylko zjawiska pierwszego rodzaju. Co do zjawisk kinetyki termod. wypowiad. one tylko w jakim kierunku zmiana nastąpi n.p. że ciepło z miejsca cieplejszego przejdzie do zimniejszego ale nie z jaką prędkością wyrównanie nastąpi.

... celui qui nous paraît le plus simple et plus clair, le mouvement."

Jamin (Cours à l'École Polyt.) : La Physique sera un jour un chapitre de la mécanique générale.

Violle (Cours de Physique 1884, préface) La Science de la nature tend vers la mécanique par une évolution nécessaire, le physicien ne pouvant établir de théories solides que sur les lois du mouvement.

Cornu
Descartes : il n'y a dans le monde physique que de la matière et du mouvement.

Lord Kelvin : Il me semble que le vrai sens de la question : Comprenons nous ou ne comprenons-nous pas un sujet particulier en physique est : Pouvons nous faire un modèle mécanique correspondant ? Je ne suis jamais satisfait tant que je n'ai pu faire un modèle mécanique de l'objet ; si je puis faire un modèle mécanique, je comprends ; tant que je ne puis faire un modèle méc. je ne compr. pas.

Mécanique est l'étude des phénomènes réversibles

Zadanie fizyki

Zdawałoby się rzeczą racyonalną, przed zajęciem się wykładem danej nauki określić cel jakiemu ta nauka podąża. Mimo że fizyka już od wieków się rozwija, dotychczas jednak spór się toczy o kwestyę jak zadanie jej najlepiej określić, a odpowiedzi od tego zależą jakie jest ich zapatrywanie na kwestye ogólnej teoryi poznania.

Naiwny umysł zadowoli się konwencyonalnem określeniem: celem fizyki jest poznawanie zjawisk natury (martwej ?) tylko i wytłomaczenie świata zewnętrznego.

Sceptyk zaś zarzuci przedewszystkiem, że wogóle nie mamy sposobu poznawania wszystkiego (świata zewnętrznego, gdyż wszystkie drogi poznania ku temu wiodące opierają się na wrażeniach jakich nam dostarczają nasze zmysły, *) że zatem cały nasz światopogląd zależy w nieznanym stopniu od przypadkowej organizacyi naszego ciała, a właściwie systemu nerwowego.

Musimy przyznać, że zatem nie poznajemy świata wszystkiego, tylko świat jaki na nasze zmysły działa, ale ostatecznie ten świat właśnie podpada nas najwięcej obchodzi, i z tem zastrzeżeniem możemy przyjąć pierwszą część powyższego określenia, streszczającego głównie zadanie t.zw. fizyki doświadczalnej: poznawanie zjawisk natury (zmysłom dostępnej).

Trudniejszą jest analiza drugiej części owego określenia, określającej czynności fizyki teoretycznej.

Pod „wytłomaczeniem" danego zjawiska dawniejsza fizyka zwykle rozumiała podanie „przyczyny" zjawiska: (Kamień spada bo działa na niego siła ciężkości). Ale z kąd wiemy że istnieje siła ciężkości? czy podanie takiej przyczyny wystarcza?

*) Jaki mógłby być światopogląd stworzenia „dwuzmysłowego" w rodzaju ślepego kretowatego lub stworzenia nie posiadającego ślepca sparaliżowanego od urodzenia. Wyjątkowo nawet ślepi na [illegible] i zapewne co dzisiejszy umysł wyników jeszcze zupełnie niezgrabny.

Z tego że kamienie spadają i z podobnych zjawisk. — Wtedy własności tendencji: kamień spada, bo kamienie mają własność spadania. Istotnie W ten sposób [illegible] tendencje [illegible] fizyki widzimy, że ~~tu~~ nam wcale nie chodzi o podanie ~~[illegible]~~ „przyczyny" danego zjawiska, w zwykłym znaczeniu tego słowa. ~~Nam chodzi o konstatowaniu~~ Zdaje się że prosta tautologia, [illegible] Konstatujemy tylko jego regularność, i z ogólność;

~~[illegible]~~ ~~przypadkowy~~

poznajemy że dany indywidualny fakt ~~nie~~ jest „przypadkowym" ale że jest jednym z rodzaju podobnych faktów w danych warunkach według znany sposób następujący się odbywających.

W tej myśli Kirchhoff ponosił zupełnie „~~definicję~~ tłumaczenie zjawisk" jako (określenie celu fizyki, ~~jako~~ wygłosił też bardzo powszechnie przyjęte i ~~[illegible]~~) że zadaniem fizyki twierdz. jest „opisywanie" zjawisk fizycznych.

Istotnie można całą fizykę teor. pod tem względem Newton ~~odkrycie~~ nie odkrył ~~[illegible]~~ grawitację jako „przyczynę" ~~skomplikowanych ruchów planet, wiele [illegible]~~ ruchu planety poruszającej się według praw Keplera itd ale odkrył nadzwyczajnie prosty sposób „opisania" wszelkich ruchów planetarnych, t.j. podał wzór ($k\frac{m m'}{r^2} = f_2$) nadzwyczaj prosty ~~[illegible]~~ z którego wszystkie owe ruchy wynikają jako konsekwencje matematyczne. Tak samo n.p. obraz (struktury gazu który nam daje teorya kinetyczna jako „przyczynę" ~~[illegible]~~ zjawisk ciśnienia, lepkości itd. wiele trafniej należy uważać jako najprostszy sposób opisania tych wszystkich zjawisk; tym razem opisania nie słowami, ani wzorami matemat., lecz z pomocą modelu.

Mechanika jest nauką o ruchu ciał (materyalnych). Zależnie od punktu widzenia przedmiot w różny sposób można podzielić. ~~Rozróżniamy statykę czyli naukę o równowadze~~

Działy ~~o których się rozpatruje~~ odnoszące się do ruchu zero (właściwie przyspieszenia zero) i wyróżniające się pewnemi znacznemi prostemi) tzw. statykę czyli naukę o równowadze, wyróżniają niektórzy autorowie jako w przeciwstawieniu do „kinetyki". Tutaj jednak nie wprowadzimy tego podziału, gdyż zagadnienia statyki się potem wydzielają jako specyalne przypadki (odrębnych zagadnień) kinetycznych.

~~Zależnie od rodzaju ciał zaś rozróżniamy~~ (mechanikę ciał odkształcających się (sprężystości, hydrodynamik) W rzeczy samej zaś uzasadniony jest podział na mechanikę punktu, ciał sztywnych i) Znaczą to jednak ~~tak dalece~~ nie tyle odmienne tereny badań ile raczej kolejne stopnie przybliżenia w opisaniu rzeczywistości zapomocą wzorów matematycznych.

Jeśli n.p. rozważamy ruch ziemi i innych planet koło słońca, możemy je w pierwszem przybliżeniu uważać jako punkty materyalne, gdyż te ruchy są prawie niezależne od rozmiarów; dokładniejszy opis stosunków kosmicznych wymaga kształtów owych ciał, więc najwygodniej je uważać jako punkty. Przy dokładniejszej analizie trzeba uwzględnić, że są to ciała kuliste czy elipsoidalne podlegające przytem ruchy obrotowe, ale kształty ich można uważać za niezmienne, jak gdyby to były ciała sztywne. Tylko przy pewnego rodzaju zjawiskach (n.p. przypływ odpływ morza, trzęsienie ziemi itp.) także sprężystość ciała ziemi się uwydatnia.

Zauważyć trzeba że tzw. mechanika punktu tworzy podwalinę dla owych innych działów, gdyż także ciała sztywne i ciała odkształcające się można sobie wyobrazić złożone ze niezmiernej liczby drobnych składowych elementów cząstek; ruch całego ciała będzie wynikiem współistnienia ruchów owych elementów składowych; ruch każdego takiego elementu zaś będzie podlegać prawom mechaniki „punktu". ~~Równocześnie prawa mechaniki punktu~~ [Sprawdza się tu równocześnie także ogólna reguła fizyki że chcąc zbadać zawsze zjawiska przyrody należy zanalizować zjawiska dla elementów

o tem później: kształt prawa Newtona 3 dziale)

Inny podział mechaniki polega na rozróżnieniu kinematyki i dynamiki (kinetyki). Każde zagadnienie mechaniki należy rozpatrzyć najprzód pod względem kinematycznym, a później dopiero pod względem dynamicznym. Kinematyką nazywamy rozważania dotyczące jedynie geometrycznych właściwości ruchu, czyli związku między danemi przestrzennemi i czasem; rozważania w których się wprowadza pojęcia masy albo siły należą do dynamiki.

Rozpoczynamy zatem od kinematyki punktu (swobodnego).

Do rachunków nad skalarami wystarczą wyłącznie metody algebry.

~~Oczywiście~~ W ogóle (Termodynamika operujemy (posługujemy się ~~wielkościami~~ pojęciami skalarnemi, dla tego też cała dziedzina nie odczuwa się potrzeby ~~wystarczy~~ używania innych niż zwykłych metod algebry i analizy etc. W mechanice i elektryczności natomiast ważnie mamy do czynienia z wielkościami kierunkowemi — i to jest dziedzina zastosowania rachunku wektorowego.

~~Przed którym atkiem więc umówimy się żeby dla nich że będziemy używać liter gotyckich~~

Przejdźmy do wyłożenia zasad tego rachunku.

~~Dla~~ Celem rozróżnienia wektorów od skalarów przyjmujemy zwyczaj zaprowadzony już przez Maxwella: używania liter gotyckiego (~~niemieckiego~~) alfabetu ~~dla~~ do oznaczania wektorów. W piśmie oprawdzie niektóre z tych znaków mało się różnią od łacińskich, ale można temu zaradzić ~~dla~~ np. przez podkreślenie ~~dodanie kreski~~ wektorów $\underline{b}$ $\underline{c}$. Zawsze jeszcze jest to wyraźniejszy sposób oznaczenia niż używanie dla nich grubych znaków ~~dla wektorów~~, jak u ~~przez~~ niektórych autorów widzimy. Bezwzględne wartości wektorów natomiast będziemy oznaczać przez odpowiednie znaki łacińskie.

~~Dal~~ Dalej umówimy się w następujący sposób: ponieważ wektor scharakteryzowany jest przez trzy dane, więc nazywamy ~~możemy~~ takie dwa wektory równymi, dla których te trzy dane są jednakowe ~~równe~~. Jest to definicja znaku = w rachunku wektorowym. Jeśli zatem $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, to znaczy: że te dwa wektory mają ten sam kierunek (to reprezentują 2 dane), czyli są równoległe oraz że wielkość bezwzględna ich jest jednakowa, czyli $a = b$. Z którego punktu zaś te wektory wykreślamy, to jest rzecz zupełnie obojętna.

Zam-

Dawniejsi matematycy do opisywania ruchu punktów w mechanice używali (przedewszystkiem) metod geometryi analitycznej, niektórzy autorowie, zwłaszcza anglicy np. Thomson & Tait także geometryi syntetycznej; dopiero w ostatnich dziesięcioleciach rozpowszechniło się używanie innej metody ujmowania matematycznego tzw. rachunku wektorowego. Zasadnicze pojęcia rachunku wektorowego zostały po raz pierwszy podane rozwinięte przez matematyka Grassmanna w dziele Lineare Ausdehnungslehre 1844, które jednak wówczas mało na siebie zwróciło uwagi. (Niezależnie od Grassmanna?) później Hamilton w Anglii wymyślił nowy rodzaj rachunku, opierającego się na pojęciu tzw. Quaternionów, wielkości złożonych (z czterech składników, jednego rzeczywistego w analogiczny sposób jak wielkości zespolone, ale nie tylko z części rzeczywistej urojonej lecz i trzech różnorodnych urojonych. Dzieło jego klasyczne, Lectures on Quat. ogłoszone zawierające bardzo systematycznie i szczegółowo wypracowany wykład tego rachunku, wzbudziło powszechny podziw, ale liczba zwolenników nowego rachunku pozostawała bardzo szczupłą, mimo że Hamilton sam, następnie zwłaszcza Tait i inni (MacAulay, Gibbs) wykazali użyteczność jego w geometryi i fizyce matematycznej. Jest to istotnie doskonały wspaniały instrument matematyczny, ale bardzo dość trudny do użycia. Zmienił się stan rzeczy dopiero odkąd Heaviside uprościł wygodniejszy Quaterniony przez odrzucenie zupełne części skalarnej, zbliżając się tym sposobem znów do założeń rachunku Grassmanna, i ogromną płodność i praktyczność tego uproszczonego rachunku udowodnił przez zastosowanie jego w dziedzinie elektryczności. W ślad za Maxwella teoryą elektryczności rozpowszechnił się także ów rachunek, który bez porównania lepiej się nadaje do tej dziedziny fizyki niż geometrya analityczna, i obecnie już uważany jest jako niezbędny środek pomocniczy w fizyce teoretycznej

*) Jako Podręczniki rachunku wektorowego polecamy: Lamb Kitto . Gans Abraham? Valentiner bardzo zwięzły wraz zastosowaniem w mechanice. Jablk.? Tokio Föppl --

#. Zasadnicza myśl tego rachunku jest to rozróżnienie wielkości skalarnych i wektorowych. ~~Skalarami nazywamy takie wielkości~~ Wektorami nazywamy takie wielkości jak przesunięcie prędkość, przyspieszenie, siła (prąd elektryczny itd.) Charakterystyczną ich cechą jest to że do określenia ich nie wystarczy podanie ilości bezwzględnej (liczby centymetrów itd.) lecz trzeba jeszcze podać kierunek w którym ową wielkość wykreślamy. (Wektora do określenia potrzeba zatem podania trzech danych, n. p. liczby bezwzględnej i dwóch kątów zawartych przez kierunek przesunięcia z osiami X, Y [a w rysunku promień wodzący prostą przedstawiającą pewien wektor trzeba jeszcze zaopatrzyć strzałką ażeby rozróżnić dwa możliwe kierunki przesunięcia, prędkości itd.] Skalarami zaś nazywamy wielkości bezkierunkowe, które się określa zupełnie podanie jednej liczby algebraicznej np. objętość, gęstość, koncentracya, masa, temperatura, potencyał, praca, entropia itd.

...erat von St. Jahn, Jahrb.
...wie den zusammenfassenden
...lloidchem. Beihefte, Bd. I,
... Svedberg, Arkiv f. Kemi,
..., Upsala 1911; J. Perrin,
...angger, Zeitschr f. Kolloide

...[1]). Es ist da nämlich
... abzuändern, falls die
...Gasmoleküle vergleichbar
...nen des sich bewegenden
... groß im Vergleich zur
...ß umgekehrt proportional
... Querschnitte des Teil-
... der Molekulargeschwin-
...nimmt dann die Brown-
...akuierung stark zu, wie
...ie beobachtet hat. Eine
...ntrolle ist da wohl noch
... ist zufolge der neueren,
...kesschen Gleichung be-
... nicht zu zweifeln, daß
...lt, und ist aus denselben
...erbei auftretenden, von
...ffenheit der Teilchen ab-
...Zahlenkoeffizienten abzu-

... Weiß[2]) nachgewiesen,
... Versuche Ehrenhafts,
...kanschen Messungen der
...rassem Widerspruch stan-
...auf die Brownsche Be-
...nhaft beobachteten ultra-
...nen und auf deren Ab-
...Kugelgestalt zurückführen

...nun zum Falle über, wo
... der Gleichgewichtslage ε
... entgegenwirkt, also die
...re Funktion ist — was
...künstliche Begrenzung des
...este Wände, erfordert.
...eispiel dieser Art ist die
...ere erfolgende Verteilung
...rdünnten Emulsion, wie
...errin[3]) und seinen Mit-
... Gummigutt- oder Mastix-

... thermodynamischen An-
...ußten sich die Teilchen
...len ansammeln, falls sie
...mgebende Medium. Da-
... tatsächlich nach Formel
...tischen Exponentialgesetz
...o, daß ihr mittlerer Ab-
...n einer Arbeitsleistung

$$\ldots = \frac{H\Theta}{N} = 4{,}1 \cdot 10^{-14} \text{ Erg}$$

...raus für $\bar{y}$ sich ergebende
... für die Höhe der aus
...deten Atmosphäre. Als
...se Erscheinungen vorher-

...Ber. 116, 1175, 1907; Broglie,
...r. 121, ... 1912.

betrachteten Volum V so wenig Moleküle ν zukommen, daß man n und δ nicht mehr als kontinuierlich Veränderliche ansehen darf. Für

7) M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Zeitschr. S. 626, 1904; Ann. d. Phys. 25, 205, 1908.

die Wahrscheinlichkeit, daß sich in diesem Falle n Moleküle eines idealen Gases in einem Volum befinden, welches normalerweise deren ν enthalten sollte, habe ich die Formel abgeleitet:

$$W(n) = \frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}, \tag{8}$$

aus welcher man leicht findet, daß auch hier die Formel (2) für das Schwankungsquadrat gültig bleibt. Dies hat Svedberg[1]) benützt, um in einigen sehr interessanten Arbeiten die Gültigkeit des Boyle-Charlesschen bzw. van't Hoffschen Gesetzes für die Teilchen kolloidaler Goldlösungen, Quecksilbersuspensionen und Gummigutt-Emulsionen zu kontrollieren, indem er systematische Zählungen der Teilchen anstellte, welche sich in bestimmten Zeitintervallen im mikroskopischen Gesichtsfeld befanden. Es ist das eine verblüffend einfache Methode zur Erforschung der Gesetze des osmotischen Druckes für solche Suspensionen, welche sonst direkter experimenteller Forschung schwer zugänglich sind.

Das Resultat dieser Messungen war, daß tatsächlich die Teilchen verdünnter disperser Systeme sich in bezug auf die Zustandsgleichung genau so verhalten wie die Moleküle eines idealen Gases, daß jedoch schon bei relativ sehr geringen Konzentrationen, wenn die Abstände der Teilchen noch hundertmal größer sind als deren Radien, bereits sehr erhebliche Abweichungen vom Boyle-Charlesschen Gesetz auftreten, und zwar so, daß die Kompressibilität geringer, also der osmotische Druck größer wird.

Man kann dies natürlich nicht dem Eigenvolum der Teilchen zuschreiben, welches als b in der van der Waalsschen Gasgleichung auftritt, denn dies gäbe nur ganz unmerkliche Korrekturen, sondern man muß schließen, daß die suspendierten Teilchen bei Annäherung eine spezifisch abstoßende Wirkung ausüben. Was deren Ursache ist, wird sich erst entscheiden lassen, wenn ein weiteres Versuchsmaterial vorliegt. Man kann an Wirkungen kapillarer, vielleicht auch elektrischer Art denken. Überhaupt muß man aber bemerken, daß man die Analogie zwischen Gasmolekülen und suspendierten Teilchen nicht zu weit treiben darf, denn die Art der Bewegung ist doch erheblich verschieden. Benachbarte Gasmoleküle wirken aufeinander gar nicht ein, außer wenn sie zusammenstoßen, während die sich bewegenden Emulsions-

8) Th. Svedberg, Zeitschr. f. phys. Chem. 73, 547, 1911; Zeitschr. f. Kolloide 9, 219, 1911; Th. Svedberg u. Katsuji Inouye, Zeitschr. f. phys. Chem. 77, 145, 1911. Eigentlich benutzte Svedberg nicht das mittlere Geschwindigkeitsquadrat, sondern den Mittelwert der absoluten Abweichungen $|\bar{\delta}|$ zur Vergleichung, für welchen ich erhalten habe: $|\bar{\delta}| = \frac{2a^{-\nu}\nu^k}{k!}$, wo k die größte ganze Zahl ist, welche gleich oder kleiner ist als ν. Es kommt das ungefähr auf dasselbe hinaus.

§ 9.

33/63

№ 16

tvs
2

Mechaniki

2

H

... genügt zu diesem Zwecke die von vornherein plausible Annahme einzuführen, daß in diesem Falle — d. h. bei unvollständiger elektrischer Teilchenentladung — nur ein gewisser Bruchteil ε der Zusammenstöße verschiedener Teilchen zur Verkettung derselben führt. Wie groß dieser Bruchteil ist, darüber wissen wir von vornherein nichts weiter, als daß er in hohem Grade von der Doppelschicht-Ladung abhängt; es wird sich aber zeigen, daß wir ihn „a posteriori“ aus den empirischen Resultaten bestimmen können.

Unter dieser Annahme würden offenbar genau dieselben Formeln (69, 70) auch in diesem allgemeinen Falle gültig bleiben, mit dem einzigen Unterschied, daß überall das Glied βt durch $\varepsilon\beta t$ zu ersetzen ist. Es folgt also ohne weiteres der wichtige Satz, daß die bei verschiedenen Konzentrationen des Kolloids und des Elektrolyten erhaltenen Koagulationskurven ähnlich sein müssen, in dem Sinne, daß sie durch eine entsprechende Änderung des Zeitmaßstabes zur Deckung gebracht werden können. Die zur Erreichung eines gewissen Koagulationsgrades erforderlichen Zeiten sind also umgekehrt proportional dem Produkte ($\varepsilon\nu_0$).

Tatsächlich ist die Ähnlichkeit der Koagulationskurven durch die Untersuchungen[2] von H. Paine an $Cu(OH)_2$-Solen und teilweise auch jene von H. Freundlich u. N. Ishizaka an $Al(OH)_3$-Solen empirisch konstatiert worden.

1) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gastheorie II, S. 213. Sonst hat Boltzmanns Theorie, welche sich nur auf den Zustand statistischen Gleichgewichts bezieht, nichts gemeinsam mit den hier behandelten Erscheinungen der irreversiblen Koagulation.

2) H. Paine, Kolloidchem. Beih. 4, 24, 1912; Kolloid Zeitschr. 11, 145, 1912; N. Ishizaka, Zeitschr. f. phys. Chem. 83, 97, 1913; H. Freundlich u. N. Ishizaka, Koll. Zeitsch. 12, 230, 1913; Zeitschr. f. phys. Chem. 85, 398, 1913. Eine Weiterführung dieser Untersuchungen in der kürzlich erschienenen Arbeit von J. Gann, Kolloidchem. Beih. 8, 63, 1916.

... beruhen, aber die Wirkung des Umrührens läßt sich leicht begreifen.

Denken wir uns nämlich die Flüssigkeit in scherende, lamellare Bewegung versetzt, so müssen die Teilchen, auch falls sie gar keine Brownsche Bewegung ausführen würden, mitunter mit ihrer Wirkungssphäre ineinandergreifen und aneinander kleben bleiben. Die Größenordnung dieses Faktors erkennen wir schätzungsweise, wenn wir uns den Mittelpunkt eines Teilchens, samt seiner Wirkungssphäre R, als feststehend vorstellen und berechnen, wieviel fremde Teilchenmittelpunkte im Falle lamellarer Strömung längs der $z = 0$ Ebene in der Zeiteinheit diese Kugel R durchstoßen würden.

Da die Geschwindigkeit im Abstande z gleich ist $z\frac{\partial u}{\partial z}$, wird der gesuchte Ausdruck für den Querschnitt der Kugel R:

$$2\nu\frac{\partial u}{\partial z}\int\int z\,dy\,dz = \frac{4\nu}{3}R^3\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (72)$$

Der relative Einfluß des Strömungsfaktors ist gegeben durch das Verhältnis dieses Ausdrucks zu der infolge der normalen Brownschen Bewegungen sich anlagernden Menge $8\pi\nu DR$, welche beträgt:

$$\frac{1}{6\pi}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{R^3}{D} = \frac{N}{HT}\mu a R^2\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (73)$$

Die koagulierende Wirkung des Umrührens wächst also ganz außerordentlich mit der Teilchengröße; wird $R = 2a$ angenommen, so würde z. B. bei einem Teilchenradius $a =$ [illegible] Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$ nur eine Vermehrung der Koagulationsgeschwindigkeit um den Bruchteil 10^{-6} bewirken, während dieselbe bei einem Teilchenradius $a = 1\,\mu$ dadurch auf das Doppelte des Normalwertes gesteigert würde. Kurz gesagt: energisches Umrühren bewirkt rasche Koagulation der mikroskopischen Teilchen, läßt aber Submikronen und Amikronen unbeeinflußt.

ilość materji = iloczyn gęstości i objętości ‖ ilość ruchu = iloczyn masy . prędkości

III

1). Każde ciało trwa w swym stanie spoczynku lub ruchu prostoliniowego i jednostajnego, jeśli siły przyłożone nie zmuszają ciała do zmiany tego stanu

2). Zmiana ruchu jest prop. do przyłoż. siły i odbywa się w kierunku prostej wzdłuż której siła jest przyłożona

3). Wszelkiemu działaniu istnieje przeciwdziałanie, skierowane przeciwnie i równe

Aj. wzajemne działania dwóch ciał są zawsze równe sobie i skierowane przeciwnie

---

Newton wyraźnie zatem pojęcia masy i siły jakoby były znanych i prawa ruchu uważa za empiryczny fakt.

Mach Poincaré

Tymczasem my przeciwnie wychodzimy z (3) do definicji masy

następnie fakt empiryczny że ciało nadaje sobie przyśpieszenie i nazywamy $m v = f$ „siłą"

Słowo siła pochodzenia antropomorficznego ale oznacza (wszakże) coś innego z zdolności naszego wysiłku.

zamiast „siła" też inna nazwa

~~Nazw~~ Nazwanie jest to umowa, konwencja, a nie fakt empiryczny, umowa to równocześnie trudności

przepis do badania i wystarczy przez zjawisko w umowa praktyczna

odrzucona już dawno (Hume)

siła przyczynowa

siła nie jest przyczyną.

rodzaje siły, grawit. (ciężkość), sprężystość, magn., elektr., ~~[illegible]~~ siły molekularne

$m w = f$ oraz jeszcze prawo niezależności siły ; ~~[illegible]~~ podstawy do wszelkiego stale

bydlemy sprawdzić wnioski

illustracja $w = \frac{f}{m}$ Atwood zależność od m

Jeśli różne ciężarki   zależność od f   ilość w cm | $2a = g = 20 = \frac{f}{m}$

f =

ciało wolno spadające

wszystkie ciała to samo przyśpieszenie   rura spadowa

to wyjaśnia niedokładności wahadła

Rozpoczynamy wykłady w warunkach bardzo przykrych i niezwykłych

Zwykle „fizyka dośw." na uniwersytecie opiera się na produkcji ~~[illegible]~~ eksperymentalnej

obecnie niemożliwe, ograniczymy się do minimum, nie jako szkoła średnia lecz uczelnia

Ale nie o to chodzi: ~~[illegible]~~ i tak wiele z doświadczeń i wiele z wniosków będzie znane ze

szkoły średniej

Różnica metoda traktowania: nie tylko przedmiot więcej wyczerpująco, ale krytycznie naukowo

Rozpoczynamy od mechaniki

podstawa, historycznie najwcześniejsza, także u osobnika mamy 2 zmysły oko, zmysł mięśniowy

od młodości doświadczenia o mechanice, aż się wyrabia rodzaj instynktu

wobec tego dziwimy się nawet, że tak długo błędne pojęcia starożytnych [illegible] (obserwacja ciała w ruchu trudna) dla tego że (pojęcia trudne

Dopiero Galileusz 1564-1642 prawo spadania i prawo bezwładności

Bezwładność wobec: Ciało nieruchome nie może własną mocą poruszyć się, stawia jakoby opór wobec

pieniądz i szklanka, pieniądz i papierek, szklanka i chustka (przy tym właściwości tarcia, że ślizganie następuje ...)

kłoda drewniana i gwoździe (łatwo poruszyć powoli (palcem) ale opór wobec nagłego uderzenia)

ciężarek i nitka

ciężarek i dwie nitki

pręcik szklany na nitkach

tak samo przejście uderzając o drzwi lub palcem pchnąć

Ale gdy raz nabędzie ruchu, dąży do zatrzymania: „poruszające się nie może zmienić kierunku ani prędkości ruchu ~~[illegible]~~ chyba za sprawą siły z zewnątrz działającej"

wóz na kolei, człowiek jadący w kolei przy zatrzymaniu ~~[illegible]~~ wypada naprzód

młot i pilnik

wózek z ciężarami i sprężyna tem dalej pójdzie im szybciej ~~[illegible]~~ [illegible] (Galileusz)

zachowuje kierunek

Kula bilardowa

największe wrażenie robi bezwładność dużych statków transatlantyckich

wyjazd z portu, trudność wprawienia i zatrzymania

Zdaje się więc sprawa całkiem jasna, jednak pewne trudności logiczne

nigdy nie ma ciała samego „przez się"

czy nie raczej odwrotnie: jeśli obserwujemy zmianę prędkości, to jest coś co tę zmianę powoduje (mówimy że istnieje siła), proste powiedzenie?

Nie jest całkiem proste; gdy zmiana prędkości zawsze umiemy wskazać ciało które ją powoduje i pewne

rezultaty co do sposobu jak te zmiany występują. To następny raz.

Jeśli obserwujemy zmianę prędkości zawsze znajdziemy drugie ciało które tę zmianę powoduje

a które samo ze swej strony podlega oddziaływaniu

z magnesem przyciąganie ... ze sprężyną

działaniu równe oddziaływanie, siły równe ale przeciwne

kula szklana i sprężyna } gdy się wymierzyło prędkości odskakiwania przekonało się że ~~tak odwrotnie jak~~ mniejsza tempo

stosunek bezwładności dwóch ciał jest stały ~~definicja~~ tę liczbę nazywamy masą

$m : m_1 = v_1 : v$

gram — sposób określania: w rzeczywistości używa się metody „zważenia" = wagi

Tem samem środek masy pozostaje nieruchomy

Sposób jak bezwładność zostaje przezwyciężona: Maszyna Atwood

1
3
5
7
9

1) prędkość jednostajna $v = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0}$

2) ruch jednost. przysp. $w = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$

$v = gt$

$s = g\frac{t^2}{2}$

$w = g$

przy ~~...~~ siły

już widzimy to co poznaliśmy pewne

zmniejszenie masy: ta sama siła wywołuje przyspieszenie odwrotnie proporcjonalne masie $g = \frac{f}{m}$

$f = mg$

Przyspieszenie niezależne od stanu ruchu ciała

Newton Phil. nat. pr. math. 1687 (1642–1727)

Pojęcia starożytnych, Galileusz

Bezwładność: woda zawieszona i gwoździe, pieniądz i szklanka, pieniądz i papierek
szklanka i chustka, pręt na nitkach, ~~młotek i~~ } bezwładność ~~[illegible]~~ spoczynku
młot i pilnik, wózek z ciężarami i sprężyna } bezwł. ruchu

Więc jak następuje zmiana prędkości, od czego zależy?

Zasada działania i oddziaływania równoczesnego: magnes i żelazo na dwóch korkach, kolejka [illegible]
papierek zawieszony, rura i sprężyna, Wurfgeschütz
odległy odwrotnie jak masy

Podobnie i ciało i ziemia, tylko ruch ziemi nieznaczny; środek masy pozostaje niezruchomy

(Bezwładność proporcjon. do masy) Sposób określania ~~mas~~ stosunku ~~g~~ gram

Dokładniejsze badanie: ruch pod wpływem siły jednostajnej

Równia pochyła, Atwood ~~[illegible]~~ $s = \frac{a}{2} t^2$

wszystkie ciała równie szybko, wahadło z korka i ołowiu, różne kule po równi pochyłej, rura próżniowa

$$f = am$$

$$p = gm$$

ogólnie: $f = mw$

(różnica wyglądu psychologicznego pojęcia „siły")

Atwood obliczenie g

Newton, ~~współczesność~~

---

chronografowane, kinematografowane ruchy, superpozycja ~~ruchów~~ prędkości

ogólne pojęcie przyspieszenia = zmienności prędkości

Parabola rzutu: Wurfgeschütz, struga wody

balistyka

---

ruch jednostajny po kole (wirówka, kula gliniana etc.
szklanka z wodą
kamień na sprężynie)

Prawa Kepplera, Newton, grawitacya

~~Wahadło~~ Ruchy drgające, (sprężystość)

wahadło matemat.

Praca, energia kinet. i potencyalna, wszystko powtórzyć z tego punktu widzenia, machiny proste

waga, ważenie etc.

momenty, środek ciężkości

ruch obrotowy bryły, moment bezwładności

wahadło rewersyjne

Krążki wirujące, precesya etc

Sprężystość ciał stałych

cieczy

Verfasser weist mittels mathematischer Analyse des in Betracht kommenden Wahrscheinlichkeitsproblems nach, dass das von ~~Fletcher angewandte~~ Verfahren mittels solcher Fletcher aus

~~Auf Grund~~

~~Verf. zeigt dass die von Fletcher entwickelte Theorie der Bewegung kleiner Tröpfchen,~~

Bei der in Rede stehenden Versuchsanordnung handelt es sich um die Kombination von Fallbewegung und Brown'scher Bewegung und um die Frage, wie jene ~~Bes~~ Bestandteile aus wiederholten, ~~[illegible]~~ mitgeteilten Beobachtungen der entsprechenden Fallzeiten rechnerisch auszusondern sind. Verfasser entwickelt die exakte math. Theorie dieses Problems, woraus folgt dass die von Hr. Fletcher gegebenen Formeln mangelhaft sind, dagegen das von Hr. Weiss angewandte Verfahren vollständig ist.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(\cos\varphi - \cos\varphi_0\right)$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\varphi_0}} = \sqrt{2\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}} =$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cdot\sin\psi$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi\,d\psi$$

$$\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi\,d\psi}{\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\ldots}\,\sin\frac{\varphi_0}{2}\cos\psi} = \frac{2\,d\psi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\psi}}$$

$$\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} =$$

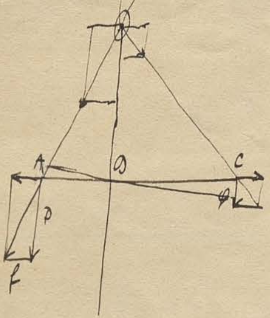
$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi\left[1+\frac{k^2}{2}\sin^2\psi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\psi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{\ldots}\right]$$

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\varphi_0}{2}+\ldots$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\,\frac{b}{1+b^2}$$

$g = 978.06\,[1 + 0.005192 \sin^2\varphi]$

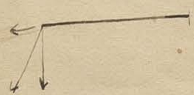
$t = t_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{4} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{4} + \cdots\right]$



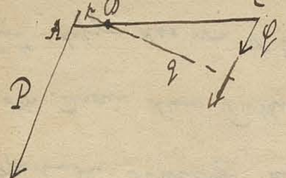
$AD : DO = f : P$ $\qquad \frac{AD}{DO} = \frac{f}{P}$

$DC : DO = f : \varphi$ $\qquad \frac{CB}{DO} = \frac{f}{\varphi}$

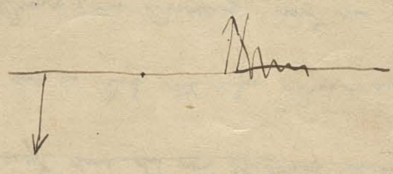
$AD : DC = \varphi : P$ $\qquad f\,DO = P\,AD = \varphi\,CB$

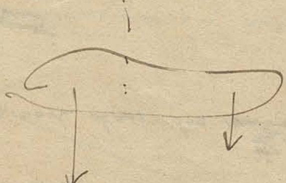


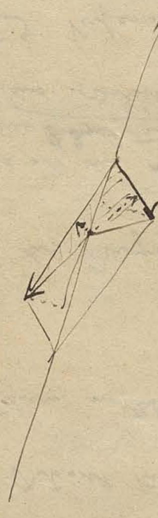
$\frac{AD}{DC} = \frac{\varphi}{P} = \frac{f}{q}$



$Pp = \varphi q$ = moment







$Pp = \varphi q$

$u = V\cos\varphi$

$v = V\sin\varphi$

$$\frac{du}{dt} = -kV^2\cos\varphi = -kVu = -ku\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - kV^2\sin\varphi = -g - kVv = -g - kv\sqrt{u^2+v^2}$$

$$\frac{du}{dt}\sin\varphi - \frac{dv}{dt}\cos\varphi = -g\cos\varphi$$

$$\left(\frac{dV}{dt}\cos\varphi - V\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\sin\varphi$$

$$-\left(\frac{dV}{dt}\sin\varphi + V\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos\varphi =$$

$$V\frac{d\varphi}{dt} =$$

~~$u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} = -gv - k(u^2+v^2)^{3/2}$~~

~~$\frac{d}{dt}(V^2) = -gV\sin\varphi - kV^{3/2}$~~

$$\frac{du}{dt} = -ku^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - kvu$$

$$\frac{dv}{dt} + kv\,f(t) = -g$$

~~$\frac{d(v+gt)}{dt} + k(v+gt)f(t) - \ldots = 0$~~

~~$v = e^{-\int kf(t)\,dt}\int_0$~~

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[C + \int Q e^{\int P\,dx}\,dx\right]$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \beta \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\beta \frac{d^2y}{dt^2}}{g+\beta\frac{dy}{dt}} = -\beta$$

$$\lg\left(g+\beta \frac{dy}{dt}\right) = -\beta t + c$$

$$\beta \frac{dy}{dt} = a e^{-\beta t} - g$$

$$\beta y = -\frac{a}{\beta} e^{-\beta t} - gt + \alpha$$

$$y = -\frac{1}{\beta} gt + \left[\frac{c\sin\alpha}{\beta} + \frac{g}{\beta^2}\right]\left[1-e^{-\beta t}\right]$$

$$x = \frac{c\cos\alpha}{\beta}\left[1-e^{-\beta t}\right]$$

$$y = -\frac{gt}{\beta} + \frac{a}{\beta^2}\left[1-e^{-\beta t}\right]$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\beta} + \frac{a}{\beta} e^{-\beta t}$$

$$\beta\frac{dy}{dt} = a e^{-\beta t} = -g + g - a e^{-\beta t}$$

$$-\frac{g}{\beta} + \frac{a}{\beta} = c\sin\alpha$$

$$\frac{a}{\beta} = c\sin\alpha + \frac{g}{\beta}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g}{\beta} + \left[c\sin\alpha + \frac{g}{\beta}\right] e^{-\beta t}$$

$$g = (g + c\beta\sin\alpha)\, e^{-\beta T}$$

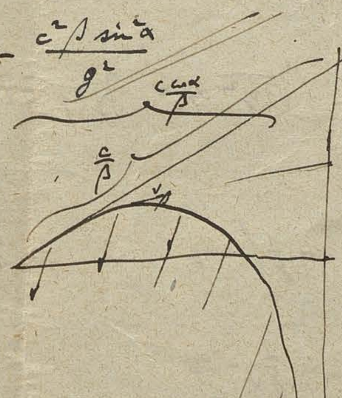
$$T = \frac{1}{\beta}\lg\left[\frac{g+c\beta\sin\alpha}{g}\right] = \frac{1}{\beta}\lg\left[1+\frac{c\beta}{g}\sin\alpha\right]$$

dla małych β:

$$T = \frac{1}{\beta}\left[\frac{c\beta\sin\alpha}{g} - \frac{1}{2}\frac{c^2\beta^2\sin^2\alpha}{g^2}\right] = \frac{c\sin\alpha}{g} - \frac{c^2\beta\sin^2\alpha}{g^2}$$

$$y = -\frac{1}{\beta}gt + \left[c\sin\alpha + \frac{g}{\beta}\right]\frac{x}{c\cos\alpha}$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{-g-\beta\frac{dy}{dt}}{\beta\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{c\sin\alpha}{\beta}+\frac{g}{\beta^2}\right)}{\frac{c\cos\alpha}{\beta}} = \text{const!}$$



$$d(v\cos\theta) = -F(v)\cos\theta\,dt$$

$$d(v\sin\theta) = -g\,dt - F(v)\sin\theta\,dt$$

v

~~$g\,d(v\cos\theta) = v\,F(v)\,d\theta$~~

~~$g\,dt = -\frac{v}{\cos\theta}\,d\theta$~~

$$\frac{v^2}{\rho} = g\cos\varphi \qquad u = v\cos\varphi$$

$$\rho = -v\frac{dt}{d\varphi}$$

~~$\frac{dv}{dt} = -kv^2$~~

$$\frac{du}{dt} = -k v^2\cos\varphi$$

$$-v\frac{d\varphi}{dt} = g\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dt}{d\varphi} &= -\frac{u}{g\cos^2\varphi}\\ \frac{du}{dt} &= -\frac{k u^2}{\cos\varphi}\end{aligned}\right\} \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{k}{g}\left(\frac{u}{\cos\varphi}\right)^3$$

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_0^2} = -\frac{2k}{g}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}$$

$$\tan\varphi = p \qquad \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = dp$$

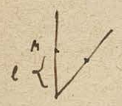
$$\int\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} = \int\sqrt{1+p^2}\,dp = \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + p\sqrt{1+p^2}$$

$$dt = -\frac{u\,d\varphi}{g\cos^2\varphi} = -\frac{1}{g}\int u\,dp$$

$$x = \int u\,dt = -\frac{1}{g}\int u^2\,dp$$

$$y = -\frac{1}{g}\int u^2 p\,dp =$$

1. Pod jakim kątem trzeba (całą wysokością) ~~wyskakując~~ z tramwaju jadącego prędkością v aby na miejscu stanąć



$$l M g \underbrace{(1-\cos\varphi)}_{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} = M \frac{v^2}{2}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{1}{lg}}$$

biorę $v = 1\frac{m}{s} = 100$

$l = 100$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{100}{2}\frac{1}{\sqrt{10^5}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{6}$$

Jak uwzględnić?

---

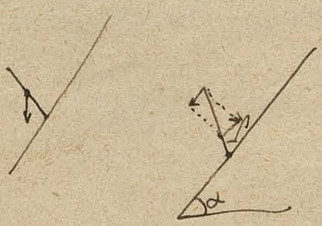
2). Looping the loop. Jakiej prędkości potrzeba aby nie spadł?

3). Czy rzucę na regułę ze wzorem ⊥

4). Pas zwinięty na stole

5). Równowaga przy jeździe rowerem

$$tg\beta = \frac{F_s}{F_n} = \cancel{mg\sin\alpha - mg\sin\alpha} + \frac{\varepsilon m}{m+\mu} \neq \varepsilon$$



$$mg\cos\alpha = F_n$$

$$F_3 = mg\sin\alpha - m\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\mu\frac{d^2s}{dt^2} = \mu g\sin\alpha + F_3 - \varepsilon$$

$$(\mu+m)\frac{d^2s}{dt^2} = (m+\mu)g\sin\alpha - \varepsilon$$

$$P_n = \frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{n!}\left[\cos^n\varphi - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-2}\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-4}\varphi + \ldots\right]$$

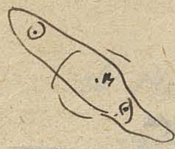
$P_0 = 1$

$P_1 = \cos\varphi$

$P_2 = \frac{3}{2}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}$

$P_3 = \frac{5}{2}\cos^3\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Mgl}}$ $K = K_0 + Ml^2$



$= 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}}$ $\lambda = \frac{K}{Ml}$

$\lambda = \frac{K_0}{Ml} + l$

~~$T = 2\pi \sqrt{\frac{K_0 + M(l-\lambda)^2}{Mg(l-\lambda)}} = 2\pi \sqrt{K_0 (1 + \frac{K}{}}$~~

~~$T' = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{Mg(l-\lambda)} + \frac{l-\lambda}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{Mlg}}$~~

$\lambda - l = \frac{K_0}{Ml}$

$T' = 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{Mg(\lambda - l)} + \frac{\lambda - l}{g}}$

$= 2\pi \sqrt{\frac{K_0}{Mgl}} + \dots$

Wzór T ? $l' = \sqrt{\frac{K}{M}}$ Koincydencje Katera metoda

Skończona amplituda

Huyghens zegar wahadłowy 1657 długość wah. sek. Picard 1669

cykloida 1673

Newton mass & weight etc g = const. 1686

Korrekcja z powodu amplitudy ~~Boug~~ Bouguer D. Bernoulli 1747 $1 + \frac{\varphi_0^2}{16}$

Borda koincydencje 1792
Cassini

Bessel 1826

Repsold

Stokes 1847

$\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \mu\theta = 0$

$$\theta = A e^{-\frac{\nu t}{2}} \sin\left(t\sqrt{\mu - \frac{\nu^2}{4}}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(1 + \frac{\nu^2}{8\mu}\right)$$

Koło 500 sek

$1°41 - 1°18$

$1{\cdot}2 : 1$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{500} = 1{\cdot}2$$

$$500 \cdot \lambda = \lg 1{\cdot}2 = 0{\cdot}2 - \frac{(0{\cdot}2)^2}{2} + \frac{(0{\cdot}2)^3}{4}$$

$0{\cdot}02$

$= 0{\cdot}18$

$\lambda = 0{\cdot}00036$

$$\frac{\lambda^2}{\pi^2} = 6 \cdot 10^{-9}$$

zaniedbano inne poprawki:

---

wpływ otoczenia; powietrze bierze udział w ruchu; jeśli dwa wahadła z innego materiału (albo ?) puste wewnątrz) tylko kształt ten sam

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mgl}} \qquad T_\kappa = 2\pi\sqrt{\frac{K+\kappa}{Mgl}}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{K_1+\kappa}{M_1 gl}}$$

porównując wyznaczam κ

o ile kula, to przybliżenie $\kappa = K\frac{\varrho}{2\delta}$

pl. parcie powietrza

$$~~T_0 = 2\pi~~ \; T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{M\left(1-\frac{\varrho}{\delta}\right)gl}}$$

Richer 1672 odkrył różnicę długości wah. sek.

Cayenne – Paryż 1¼ linii = 36' 8½''

$$\frac{36\cdot 12}{\frac{72}{432\frac{2}{8}}}$$

w Paryżu przedłużyć o ↑

$$\frac{1\cdot25}{440\cdot5} \neq \frac{1}{480}$$

więc g większe w Paryżu o $\frac{1}{400}$

Newton [1686] grawitacja powszechna, figura ziemi, spłaszczenie, zależność g od szerokości geograf.

Bouguer Maskelyne

$$\frac{4\pi}{3} k \rho_0 a = g$$

Airy Sternneck: 6·5

$$\frac{dg}{dr} = ~~k\,\frac{20}{3}\pi\rho\left(1-\frac{2}{5}\frac{\rho_0}{\rho}\right) = \frac{5g}{a}\left(1-\frac{2}{5}\frac{\rho_0}{\rho}\right)~~$$

$$= \frac{8}{3}\pi\rho_0 k\left(1-\frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_0}\right) = \frac{2g}{a}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

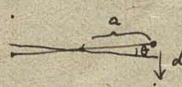
$$g = g_0\left[1-\frac{2h}{a}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right]$$

Bouguer (1749) wzór
użyczony tekstowo do redukcji
rezultatów nast.

Mitchell plan

Cavendish wyrobienia 1798

[drut długości 1 m
i ramię 1 m]



$$2k\frac{mMa}{d^2} = \mu\theta$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

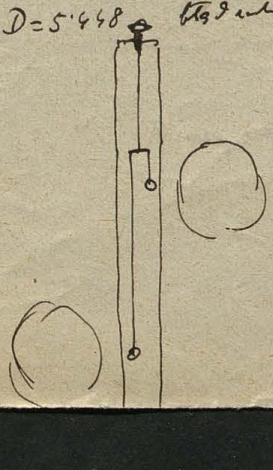
$$k = \frac{4\pi^2 K\theta}{T^2}\cdot\frac{d^2}{2Mma}$$

Rapports
113

z tego $\rho_0 = \frac{g}{\frac{4}{3}\pi k a}$

odczytywanie ~~minimum~~ lunetką
przy ramieniu

Cavendish · D = 5·448 błąd rachunku 5·48



Reich Baily Cornu & Baille

Boys m(Au) średnica 5 mm

M (Pb) " koło 10 cm

2'5·
1'3 – 4 g.
7·407 kg

2'3 cm

zredukowane

(1895)

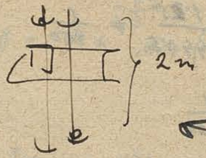
Δ = 5·5270

k = 6·6576 . 10⁻⁸

Braun 1896 Δ = 5·52725

Wilsing 1886 5·579

Waga Jolly

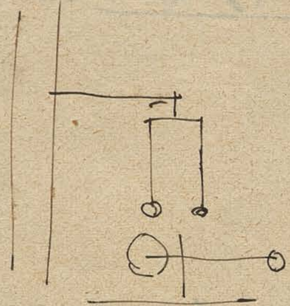


na kgr 1·36 mg

$\frac{dg}{dh} = \frac{1·245}{0·121}$

1898 Richarz & Krigar-Menzel

Δ = 5·505



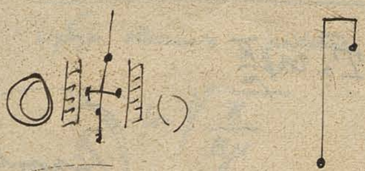
jednostka przyciągania 10^-8 ciężaru pierwotnego dodatkowe

Δ = 5·4934

Wpływ ośrodka?

Austin & Thwing 1897

różnica < $\frac{1}{500}$



Poynting & Gray nie ma różnicy w kierunkach kryształu kwarcu

Wpływ procesów chemicznych Landolt? nie ma dostrzegalnych

Granica ważności prawa grawit. od r =

tion, doch tritt jedenfalls bei der chemischen Kinetik ein hier nicht berücksichtigter Faktor wesentlich bestimmend hinzu.

Damit hängt wohl auch ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal zusammen, daß nämlich chemische Reaktionen von den Gesetzen der Wertigkeit beherrscht werden, während bei Koagulation eine unbegrenzte Agglomeration stattfindet. Letztere läßt sich, wie wir sahen, durch kugelige Anziehungsbereiche erklären, während bei seiner Theorie des Dissoziationsgleichgewichts sich schon Boltzmann seinerzeit genötigt sah, die Möglichkeit sphärischer Wirkungsgebiete zu verlassen und die Existenz gewisser „empfindlicher Bezirke" auf der Oberfläche der Atome anzunehmen, da sonst die Tatsache unerklärlich wäre, daß z. B. O_2, H_2, N_2-Moleküle als Doppelatome bestehen, ohne daß dreifache, vierfache Atome auftreten[1]).

6. Verallgemeinerung für langsame Koagulation, Ähnlichkeitsgesetze.

Schließlich möchte ich noch kurz bemerken, daß unsere Theorie geeignet erscheint, auch die Erscheinungen der „langsamen" Koagulation, welche bei sehr geringem Elektrolytzusatz eintreten, wenigstens in formaler Hinsicht zu umfassen. Es genügt zu diesem Zwecke die von vornherein plausible Annahme einzuführen, daß in diesem Falle — d. h. bei unvollständiger elektrischer Teilchenentladung — nur ein gewisser Bruchteil ε der Zusammenstöße verschiedener Teilchen zur V...

des Wirksamkeitskoeffizienten[1]) ε von der Art und Konzentration des Elektrolyten zu geben.

7. Theorie der Versuche Paines.

Bei Paines Versuchen läßt sich die mathematische Analyse noch weiter treiben, und die Sache scheint mir so interessant, daß ich sie noch kurz darstellen möchte. Paine bestimmte nämlich die Menge des koagulierten Niederschlages, welcher sich aus seinen Lösungen nach gewisser Zeitdauer der Elektrolyteinwirkung absetzte, sobald die Lösung erhitzt oder aber eine Zeitlang umgerührt wurde. Die Wirkung der Erhitzung mag auf einem uns nicht bekannten Temperatureinfluß beruhen, aber die Wirkung des Umrührens läßt sich leicht begreifen.

Denken wir uns nämlich die Flüssigkeit in scherende, lamellare Bewegung versetzt, so müssen die Teilchen, auch falls sie gar keine ...

96/53

VII 5

24

Mechanika ciał

sprężystych

Mechanika ciał sprężystych w ogólnym znaczeniu tego słowa (więc mianowicie stałych).

Pewien rodzaj sprężystości poznaliśmy już w hidrostatyce. Sprężystość wyrażała się ~~przez~~ równaniem $\rho = f(p) = \rho_0 [1 + \beta p]$ $\quad \beta = \dots$

~~Jest to tylko~~ Zobaczymy później że odpowiada to „sprężystości objętościowej" przy ciałach stałych. Tymczasem nie istniała żadna sprężystość względem ~~p~~ odkształceń stycznych, zmieniających kształt a nie objętość: cząsteczki przesuwają się pod działaniem sił zewnętrznych [działających dążących do zmiany kształtu] tak długo jak te siły istnieją. Tutaj rzecz ma się inaczej: także opór przeciwko zmianom kształtu ciała.

Zanim przejdziemy do ogólnej teorii rozpatrzymy kilka faktów doświadczalnych które ~~mogą~~ stanowić punkt wyjścia wniosków dalszych teoretycznych.

Drut długości l przedłuży się do l' przez przyczepienie siły ~~P~~ p

~~[illegible]~~ Od czego będzie siła zależała? Jeśli dwa równe druty to do każdego przyczepić trzeba p, w całym kręgu $2p$, a można ~~je~~ sobie wystawić połączone w jeden drut o tej samej długości ale podwójnym przekroju więc będziemy wnioskowali: siła prop. do przekroju — co także doświadczenie potwierdza. Więc ~~[illegible]~~ $p = E\, q\, f(l', l)$

Tak samo jeśli przyczepimy tak jeszcze ~~podwójny~~ drut ~~p~~ przy końcu to przedłużenie podwójne więc w ogóle przyd. do długości przy tej samej sile

$$p = \frac{E q}{l} f(l')$$

a względem przedłużenia prawo Hooke'a: ut tensio sic vis: $p = E q \frac{l'-l}{l}$

~~[illegible]~~ $\frac{l'-l}{l}$ = przedłużenie względne $\qquad E$ = współczynnik modul sprężystości (podłużnej) itp.

2

Albo odwrotnie: $l' = l\left[1+\frac{Pl}{Eq}\right]$

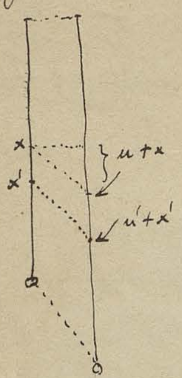
|| Zupełnie tak: $l' = \ldots = f(0) + P f'(0) + \frac{P^2}{2} f''(0) + \dots$

Jeśli będziemy nadal używali znaku $\frac{P}{q}$ = siła przypadająca na 1 cm² jako $= p$ (która przedstawia natężenie równe w całej długości drutu) to mamy:

$$p = \frac{l'-l}{l} E \qquad l' = l\left[1+\frac{pl}{E}\right]$$

Przez to uwolniliśmy się niezależnie od grubości drutu (przypadkowej)

Aby wyrazić siłę jako funkcję stanu drutu niezależnie od długości



przedłużenie kawałka $l = x'-x$: $\quad l' = x'+u'-(x+u)$

$$\frac{l'-l}{l} = \frac{u'-u}{x'-x}$$

$$u' = u+\Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dots \quad (= f(x))$$

a jeśli $x' = x+\Delta x$

to $\frac{l'-l}{l} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$

E stal = 20 000 kg/mm²
miedź 7000
Pb 1800

$$p = E\frac{du}{dx}$$

Naturalnie że siła p musi być oznaczona przez stan elementów nieskończenie bliskich, przez stan otoczenia bezpośredniego

Jeśli wyrazimy to w ten sposób to mamy tę korzyść że można tego samego wzoru także użyć jeśli u nie są jednostajnie rozmieszczone

(Tutaj $\frac{du}{dx}$ = stałe, bo $u = l'-l = \frac{p}{E}l = \frac{p}{E}x$ więc $\frac{du}{dx} = \frac{p}{E}$]

Ale n.p. dojdziemy nato że chcemy przyłożyć takie siły p, ażeby było $u = \sin x$ to musiałoby działać p w punkcie x:

$$p = E\cos x$$

Albo odwrotnie dane p jako funkcya x, jakie będzie przedłużenie u?

N.p. ciężar drutu:

~~$p = p_0 + $~~ $p = p_0 + kx$ $(l-x)$ $= E \frac{du}{dx}$

$$p_0 x + k\frac{x^2}{2} = E u$$ ~~+ const.~~ co jeśli w punkcie $\begin{cases} x=0 \\ u=0 \end{cases}$

Więc n.p. całkowite przedłużenie końca drutu o długości l:

$$l' - l = u|_{x=l} = \frac{1}{E}\left[p_0 l + \frac{kl^2}{2}\right] = \frac{l}{E}\left[p_0 + \frac{kl}{2}\right]$$ więc takie

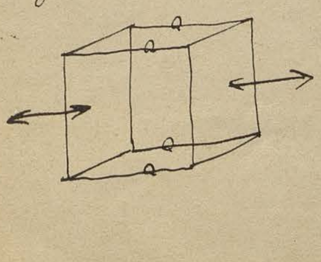
jak gdyby drut nie miał ciężaru lecz gdyby p_0 było powiększone o połowę całego swego ciężaru.

(W istocie przedłużenie właściwie nastąpi jeszcze trochę odmienne rozwieszeniu bo zamiast $p_0 + kx$ będzie trzeba wstawić $p_0 + k(x-u)$ etc. ale to można zaniedbać).

Jeśli się przy tem wszystkiem robi dokładne pomiary to widzi się że grubość drutu zmniejsza się podczas przedłużenia w pewnym stosunku tak że jeśli δ = grubość normalna a δ' podczas przedłużenia, to

$$\frac{\delta' - \delta}{\delta} = -\mu \frac{l' - l}{l} \qquad \mu = 0{\cdot}2 - 0{\cdot}5$$

To samo zjawisko we formie szematycznej: Jeśli wytniemy sobie kostkę o długości boków 1cm



Przyczepiając siły p do przeciwległych podstaw następuje przedłużenie boków a: o $\Delta a = \frac{p}{E}$

a ~~przedłużenie~~ skrócenie boków b i c: o $\mu \frac{p}{E}$

a przyczepiając ciśnienie zamiast sił ciągnących (odwrotnie tak samo)

Jaka zmiana objętości wskutek tego?

$$(1+\Delta u)(1-\Delta v)(1-\Delta w) = 1+\Delta u-\Delta v-\Delta w$$

$$= 1+\Delta u-2\mu\Delta u = 1+(1-2\mu)\Delta u$$ Więc zmiana objętości $=(1-2\mu)\Delta u$

~~Zatem~~ μ zawsze jest mniejsze od $\frac{1}{2}$; ~~gdyby~~ jeżeli $\mu = 0'5$ (Kauczuk, żelatyna) zmiana objętości $=0$, jeżeli mniejsze to następuje rozszerzenie.

Jeżeli teraz równe siły (ciśnienie) p przyłożymy do wszystkich stron, jaka zmiana boków i objętości?

Superpozycja przyjmujemy jako [illegible]

boki ~~[illegible]~~ $1-\frac{p}{E}+2\mu\frac{p}{E} = 1+(2\mu-1)\frac{p}{E}$

a zmiana objętości: $\left[1+(2\mu-1)\frac{p}{E}\right]^3$, więc zmiana gęstości $1+3(2\mu-1)\frac{p}{E}$

to wyrażenie odpowiada ściśliwości przy cieczach: $-\frac{3(2\mu-1)}{E} = \beta$

~~zasada~~ można je więc wyrachować jeżeli się zna E i μ

współczynnik $\frac{E}{3(2\mu-1)} = K$ t.zw. zmiana...

oznacza się czasem także osobnym znakiem = współczynnik sprężystości odpowiadającej ściśnieniu (Volummodul) w książkach hydrodynamicznych mówi się ~~współczyn~~ „sprężystość objętościowa". Więc można i odwrotnie ~~[illegible]~~ μ mierzyć E i K [to ostatnie albo piezometrem Oersteda albo zapomocą ważenia].

Przy tem zmieniła się objętość lecz nie zmienił się kształt. Czy można także odwrotnie [illegible] zmienić kształt nie objętość?

Jeszcze bardzo ważny sposób odkształcenia: posuwiste np. zapomocą siły X przyłożonej do podstaw $\overline{ac}$ w górze i na dole (skręcenie prętu)

Ciała jednolite i ~~jedn~~ równokierunkowe

(~~.....~~ Voigt teorya sprężyst. kryszt.

Ciała równokier.. i jednolite stosunkowo bardzo rzadkie

Struktura ~~...~~ mikrokrystaliczna (metale), czesami ukryta (włókna rozgryzione HFl,

Wogóle materyały źle określone [równa z pewami i ciężkami jednakowo skład chemiczny
(struktura nieznana) ~~...~~ wystarczy do scharakteryzowania]

Dla tego bardzo niepewne podstawy do ...

Teorya stanowi tylko I przybliżenie.

Prawo Hooke'a tylko w granicach ... granica sprężystości | wytrzymałości

w praktyce inżynierskiej współczynnik bezpieczeństwa (żelazo kute $\frac{4}{5}$
drzewo $\frac{1}{10}$)

nie ma żadnego sensu

można złamać mniejszą siłą powtarzaną

Bauschinger pewien rodzaj żelaza : wytrzymałość 3480 at.
na ciągnienie
" powtarzane .. 2000
ciągn. i ciśn. powt. 1770

Od czego zależy złamanie ? ~~...~~ 1). natężenia maksym.
2). ~~deformacyi~~ wydłużenia maksym.
3). zmiany kątów ?

W praktyce większy rozrzut [?] wartości modułu E dla ciśnienia i ciągnienia
to zupełnie nieuzasadnione

Föppl

Prawo Hooke'a tylko dla względ. liniowych (drutów).

Ogólniej? Prawo superpozycji: deformacya sprowadz. działaniem 2 sił ~~jest~~ powstaje przez złożenie deformacyi sprowadz. przez każdą siłę z osobna.

To zawiera już w sobie prawo Hooke'a

Gdyby było:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{p}{E} + \frac{p^2}{C} \\ \frac{du'}{dx} &= \frac{p'}{E} + \frac{p'^2}{C} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d(u+u')}{dx} \gtrless \frac{p+p'}{E} + \frac{(p+p')^2}{C}$$

Ale ogólniejsze bo dotyczy różnych kierunków

Doświadczenie trudno w ogólnym przypadku zbadać; konsekwencye wnioskujemy się zgadzają z faktami.

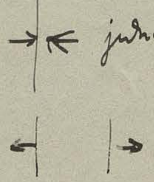
W każdym razie najprostsza teorya; więc może służyć jako I przybliżenie

---

Rozpoczniemy zawsze od tego co rozumiemy pod rozciąganiem drutu

na pow.

Gdyby ciało przecięte pow. jakie siły przyciąg. ciały powinny



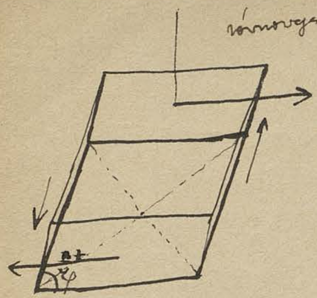
jednakowe

jednakowe z pominięciem małych wyższych rzędów

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = \ldots$$

itd.

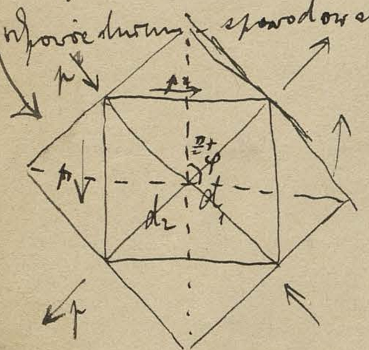
równowagę mechaniczną wymaga przyłożenia sił ↓ ↑



można je określić n.p. za pomocą kątów stworzonych przez przekątnie; w normalnym stanie będą one

$\frac{\pi}{2}$ teraz $\frac{\pi}{2}+\varphi$ $\frac{\pi}{2}-\varphi$

W tedy p potrzebny aby stworzyć zmianę o kąt $\varphi = 1$ nazywamy T = współczynnik sprężystości ~~posuwistej~~ rotacji = sztywności. Można go jednak wyrazić za pomocą E i μ, ponieważ można zastąpić to przekształcenie przedłużeniami odpowiedniemi, spowodowanemi przez nowe siły tej samej wielkości $\frac{p}{p'}$



~~Siła działa siła p' a na powierzchnię jednostki (większej) p = $\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = p'$~~ $p\sqrt{2}$ p'

~~przez~~ to nastąpi przedłużenie:

~~Faktycznie wypadkowa sił~~ $p, p_2 = p\sqrt{2}$, a ~~siła~~ całkowita $p' = p\sqrt{2}$ powierzchnia w tym stosunku $\sqrt{2}$ większa. Więc powstaną takie same ciśnienia, a kształt w ten sam sposób się zmieni. Nastąpi więc przedłużenie jednej przekątnej o $\varepsilon = (1+\mu)\frac{p}{E}$, a ~~...~~ równe skrócenie drugiej.

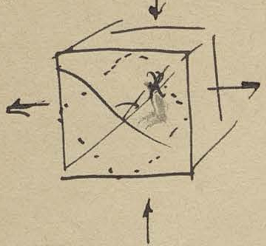
$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

~~$\varphi = 2\varepsilon$~~

$$= \frac{tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\varphi}{2}}{1 - tg\frac{\pi}{4}\, tg\frac{\varphi}{2}} = \frac{1+tg\frac{\varphi}{2}}{1-tg\frac{\varphi}{2}} \qquad tg\frac{\varphi}{2} = \varepsilon$$

$$\varphi = 2\varepsilon$$

$$\frac{p}{\varphi} = T = \frac{p}{2(1+\mu)\frac{p}{E}} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

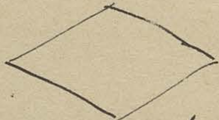


~~[illegible]~~

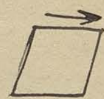
$\frac{p}{\mathfrak{X}} = T$ objętość nie zmienia się bo

$(1+\mu-\mu)(1-\mu)(1+\mu)-1$

Jeżeli



podstawy uważa się jako stałe to



przesunięcie równoległe warstw

więc ~~[illegible]~~ dwie z wielkości E, K, T, μ można ~~[illegible]~~ wyrachować z dwóch innych.

E, T łatwiej do mierzenia, więc zwykle K obrachowuje się; lecz racjonalniej: 2 części K, T, jako fundamentalne, E z nich.

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \qquad T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$E = 3(1-2\mu)K$$

$$T = \frac{3(1-2\mu)}{2(1+\mu)}K$$

Jeżeli dowolne ciśnienia prostopadłe ~~p_{xx} p_{yy} p_{zz}~~ X_x Y_y Z_z

to wydłużenia:

$$\xi = \frac{X_x + \mu(Y_y + Z_z)}{E}$$

$$\eta = \frac{Y_y + \mu(p_x + p_z)}{E}$$

$$\zeta = \text{—} \quad \text{—}$$

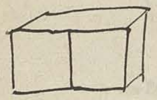
$$\mathfrak{X} = \frac{2(1+\mu)}{E} X_y$$

$$\varphi = \frac{2(1+\mu)}{E} Y_z$$

$$\psi = \frac{2(1+\mu)}{E} Z_x$$

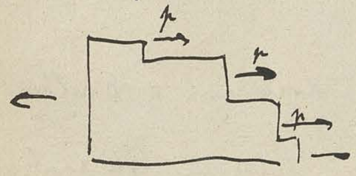
Odkształcenie jednorodne

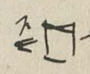
Co jest właściwie charakterystyczną cechą tych odkształceń; forma kostki niepotrzebna, jeśli przyczepimy dwie do siebie, to powtórzą podłużnie - -



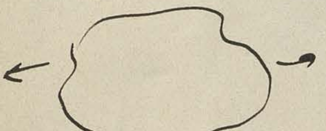
takie same ciśnienia i odkształcenia jeśli odniesiemy ciśnienie do jedności powierzchni, a odkształcenia do jedności długości.

Taksamo jeśli przyczepimy do wszystkich powierzchni X siły:



to znów takie same odkształcenie jak gdyby kostka  mnie; ja robię wystawić wszystko;

więc wogóle możnaby dowolne ciało w ten sposób odkształcić



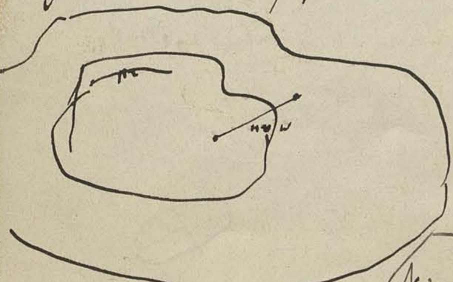
tak samo względem innych ciśnień.

Charakterystycznem jest I że ciśnienia w każdej części ciała są takie same

II że odkształcenie jest jednorodne, tj. że element objętości w kształcie kostki wszędzie w ten sam sposób zostaje odkształcony

To znaczy według tego co było powiedziane przy pręcie drutów :

jeśli oznaczymy przez u v w przesunięcie punktu z pozycji równowagi



że $\frac{\partial u}{\partial x} = a_1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a_2 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = a_3$

$\frac{\partial v}{\partial x} = b_1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b_2 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = b_3$

etc.

Np. w Piezometrze Örsteda

albo całkując:

$u = a + a_1 x + a_2 y + a_3 z$

$v = b + b_1 x + b_2 y + b_3 z$

$c = c + c_1 x + c_2 y + c_3 z$

w ten obierając początek spółrzędnych w odpowiedni sposób można a b c = 0 uczynić zatem pozostanie 9 ~~[illegible]~~ dowolnych wielkości.

Jak będzie można opisać takie odkształcenie

będziemy mieli jednorodne przedłużenia w 3 kierunkach dowolnych = 6 wielkości dowolnych, a oprócz tego także 3 obroty więc 9 wielkości, faktycznie tyle dowolnych wielkości.

Więc spółrzędne po odkształceniu x' y' z':

$$x' = x + a_1 x + a_2 y + a_3 z = (1+a_1)x + a_2 y + a_3 z$$

$$y' = \quad = b_1 x + (1+b_2) y + b_3 z$$

$$z' = \quad = c_1 x + c_2 y + (1+c_3) z$$

Więc używając znanego twierdzenia geometrii analitycznej: każda krzywa i każda powierzchnia stopnia n pozostanie krzywą lub powierzchnią tego samego stopnia (ale naturalnie o innych spółczynnikach) mimo odkształcenia.

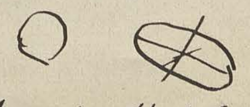
N. p. prosta prostą, płaszczyzna płaszczyzną

Powierzch. $A x' + B y' + C z' + D = 0$ = równanie powierzchni podstaw.

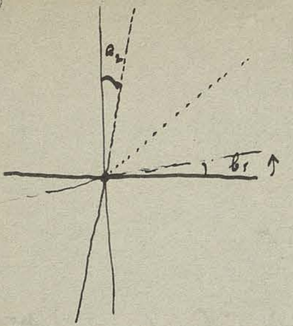
więc wstawiając tu wartości $A x + B y + C z + D = 0$ itd.

A kula zamieni się w elipsoidę

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = const$: $\quad A x^2 + B y^2 + C z^2 = const$



osi tej elipsoidy nazywamy kierunkami (głównemi) przedłużenia, elipsoida odkształcenia



Składowe obroty

$$\frac{b_1 - a_2}{2} = \gamma$$

$$\frac{c_2 - b_3}{2} = \alpha$$

$$\frac{a_3 - c_1}{2} = \beta$$

Składowe skręty

$$\frac{a_2 + b_1}{2} = \chi$$

$$\frac{b_3 + c_2}{2} = \varphi$$

$$\frac{c_1 + a_3}{2} = \psi$$

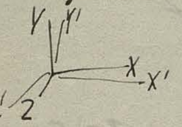
$$x' = x + a_1 x + \frac{a_2 - b_1}{2} y + \frac{a_3 - c_1}{2} z + \frac{a_2 + b_1}{2} y + \frac{a_3 + c_1}{2} z$$

$$= x + a_1 x - \gamma y + \beta z + \chi y + \psi z$$

$$X_y = Y_x = \frac{X}{T} = (a_2 + b_1) \frac{2(1+\mu)}{E}$$

$$X_x = \ldots\ldots$$

wydłużenia w kierunku X Y Z wraz ze skrętami można zastąpić przez wydłuż. w kierunkach 3 dowolnych



$$x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z \qquad x_2 = x_1(1+\lambda)$$

$$y_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \qquad y_2 = y_1(1+\mu)$$

$$z_1 = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \qquad z_2 = z_1(1+\nu)$$

$$x_3 = \alpha x_2 + \alpha' y_2 + \alpha'' z_2 = \alpha(1+\lambda) x_1 + \alpha'(1+\mu) y_1 + \alpha''(1+\nu) z_1$$

$$= x\left[\alpha^2(1+\lambda) + \alpha'^2(1+\mu) + \alpha''^2(1+\nu)\right] + y\left[\alpha\beta(1+\lambda) + \alpha'\beta'(1+\mu) + \alpha''\gamma''(1+\nu)\right]$$

$$+ z\left[\alpha\gamma(1+\lambda) + \alpha'\gamma'(1+\mu) + \alpha''\gamma''(1+\nu)\right]$$

$$x_3 = x\left[1 + \alpha^2\lambda + \alpha'^2\mu + \alpha''^2\nu\right] + y\left[\alpha\beta\lambda + \alpha'\beta'\mu + \alpha''\beta''\nu\right] + z\left[\alpha\gamma\lambda + \alpha'\gamma'\mu + \alpha''\gamma''\nu\right]$$

$$y_3 = x\left[\beta\alpha\lambda + \beta'\alpha'\mu + \beta''\alpha''\nu\right] + y\left[1 + \beta^2\lambda + \beta'^2\mu + \beta''^2\nu\right] + z\left[\beta\gamma\lambda + \beta'\gamma'\mu + \beta''\gamma''\nu\right]$$

$$z_3 = x\left[\gamma\alpha\lambda + \gamma'\alpha'\mu + \gamma''\alpha''\nu\right] + y\left[\gamma\beta\lambda + \gamma'\beta'\mu + \gamma''\beta''\nu\right] + z\left[1 + \gamma^2\lambda + \gamma'^2\mu + \gamma''^2\nu\right]$$

$$x_3 = x(1+a_1) + \varphi z + \chi y$$

$$y_3 = y(1+b_2) + \chi x + \varphi z$$

$$z_3 = z(1+c_3) + \varphi y + \psi x$$

$$\xi = \frac{X_x - \mu(Z_z + Y_y)}{E} \qquad \xi E = X_x - \mu(Y_y + Z_z)$$

$$\eta = \frac{Y_y - \mu(X_x + Z_z)}{E} \qquad \eta E = Y_y - \mu(X_x + Z_z)$$

$$\zeta = \frac{Z_z - \mu(X_x + Y_y)}{E} \qquad \zeta E = Z_z - \mu(X_x + Y_y) \quad \Big| \mu$$

$$E(\eta + \mu\zeta) = X_x(\mu + \mu^2) + Y_y(1 - \mu^2) \quad \Big| \mu + \mu^2$$

$$E(\xi + \mu\zeta) = X_x(1 - \mu^2) - Y_y(\mu + \mu^2) \quad \Big| 1 - \mu^2$$

$$X_x\left[(1-\mu^2)^2 - (\mu+\mu^2)^2\right] = E\,\xi(1-\mu^2) + \eta(\mu+\mu^2) + \zeta\mu(1+\mu)$$

$$1 - 2\mu^2 + \mu^4 - \mu^2 - \mu^4 - 2\mu^3 \qquad = \xi(1-\mu^2)E + \eta\mu E(1+\mu) +$$

$$= 1 - 3\mu^2 - 2\mu^3 \qquad (1+\mu)^2\left[(1-\mu)^2 - \mu^2\right] = (1+\mu)^2(1-2\mu)$$

$$= (1+\mu)^2(1-2\mu)$$

$$X_x = \xi\frac{(1-\mu)E}{(1+\mu)(1-2\mu)} + \frac{(\eta+\zeta)\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 & -\mu \\ -\mu & -\mu & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \xi E & -\mu & -\mu \\ \eta E & 1 & -\mu \\ \zeta E & -\mu & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(\xi+\eta+\zeta)\mu E}{1+\mu\,(1-2\mu)} + \xi\frac{E}{1+\mu}$$

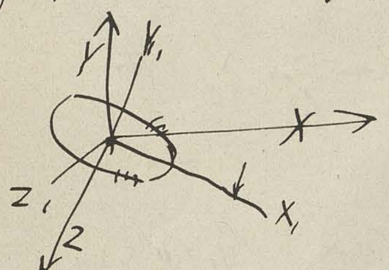
$$= \lambda\Delta + 2\Gamma\xi$$

oznaczają one oczywiście kierunki w których wydłużenia są największe.

Musimy jeszcze dowieść że dopiero taki odkształcenie równoważne trzech wydłużeniom i 3 obrotom, przy czem i wielkości tych są otrzymany.

Wydłużenia nie będą miały kierunku X Y Z lecz dowolne

Dajmy na to że otrzymamy w ich kierunku układ spółrzędnych $x_1\ y_1\ z_1$



wtedy przekształcenie spół rzędnych z

XYZ na $X_1\ Y_1\ Z_1$

~~$x_1 = x_1 \cos\alpha_1 \qquad x = y_1 \cos\alpha_2$~~

Łączmy $\cos\alpha_1 = u \qquad \cos\alpha_2 = v \qquad \cos\alpha_3 = w$

$\cos XX_1 = \alpha \quad \cos YX_1 = \beta$

$\cos XY_1 = \alpha'$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y_1 = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z_1 = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{cases}$$

W tych kierunkach następuje wydłużenie więc nowe spółrzędne w wydłużeniach:

$x_2 = x_1 + u_1 = x_1(1+\lambda)$ jeśli wydłużenie $u_1 = \lambda x_1$

$y_2 = y_1(1+\mu)$

$z_2 = z_1(1+\nu)$

Teraz mamy napowrót w dawniejszym układzie

$x_3 = \alpha x_2 + \alpha' y_2 + \alpha'' z_2$

$y_3 = \beta x_2 + \beta' y_2 + \beta'' z_2$

$z_3 = \gamma x_2 + \gamma' y_2 + \gamma'' z_2$

12

teraz jeszcze obroty nieskończenie małe ~~[illegible]~~ $\alpha \beta \gamma$

$$x_4 = x_3 - \gamma y_3 + \beta z_3$$

~~[illegible]~~

$$y_4 = y_3 - \alpha z_3 + \gamma x_3$$

$$z_4 = z_3 - \beta x_3 + \gamma y_3$$

Teraz wszystko wyrachować ~~[illegible]~~ opuszczając wielkości jak $\lambda \gamma$ etc.

$$x_4 = \sout{u x_1 + v y_1 + w z_1}$$

$$= u x_1 (1+\lambda) + u' y_1 (1+\mu) + u'' z_1 (1+\nu) - \gamma (v x_1 + v' y_1 + v'' z_1) + \beta (w x_1 + w' y_1 + w'' z_1)$$

$$= x_1 (u + u\lambda - \gamma v + \beta w) + y_1 (u' + u'\mu - \gamma v' + \beta w') + z_1 (u'' + u''\nu - \gamma v'' + \beta w'')$$

$\downarrow$

$ux + vy + wz$

$$= x [u^2 + u^2\lambda - uv\gamma + uw\beta + u'^2 + u'^2\mu - u'v'\gamma + u'w'\beta + u''^2 + u''^2\nu - u''v''\gamma + u''w''\beta] +$$

$$+ \ldots \quad \left[\begin{array}{l} uv + u'v' + u''v'' = 0 \\ \text{etc.} \end{array} \right]$$

$$x_4 = (1 + \lambda u^2 + \mu u'^2 + \nu u''^2) x + (\lambda uv + \mu u'v' + \nu u''v'' - \gamma) y + (\lambda uw + \mu u'w' + \nu u''w'' + \beta) z$$

$$y_4 = (\lambda vu + \mu v'u' + \nu v''u'' + \gamma) x + (1 + \lambda v^2 + \mu v'^2 + \nu v''^2) y + (\lambda vw + \mu v'w' + \nu v''w'' - \alpha) z$$

$$z_4 = (\lambda wu + \mu w'u' + \nu w''u'' - \beta) x + (\lambda wv + \mu w'v' + \nu w''v'' + \alpha) y + (1 + \lambda w^2 + \mu w'^2 + \nu w''^2) z$$

Ponieważ współczynniki dowolne więc doprawdy można rozłożyć dowolne ~~przes~~ odkształ[cenie] w ten sposób więc:

$$a_1 = \lambda u^2 + \mu u'^2 + \nu u''^2 \qquad b_1 = \lambda uv + \mu u'v' + \nu u''v'' - \gamma$$

$$b_2 = \lambda v^2 + \mu v'^2 + \nu v''^2 \qquad a_3 = \lambda uw + \mu u'w' + \nu u''w'' + \beta$$

$$c_3 = \lambda w^2 + \mu w'^2 + \nu w''^2 \qquad a_2 = \lambda vu + \mu v'u' + \nu v''u'' + \gamma$$

. . . .

. . .

$$a_1 + b_2 + c_3 = \lambda + \mu + \nu$$

$$a_2 - b_1 = 2\gamma \qquad b_3 - c_2 = 2\alpha \qquad c_1 - a_3 = 2\beta$$

Co następuje wskutek takiego odkształcenia jednorodnego względem elementów objętości?

$$x' = (1+a_1)x + b_2 y + a_3 z$$

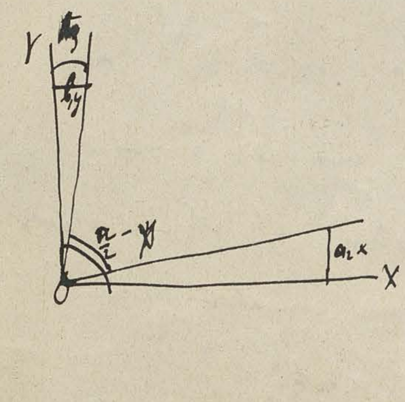
$$y' = a_2 x + (1+b_2) y + b_3 z$$

$$z' = c_3 x + b_3 y + (1+c_3) z$$

Jak przemieniają się punkty leżące na osiach XYZ?

I.) Przedłużenie punktów w kierunkach X Y Z w stosunkach $(1+a_1)$ $(1+b_2)$ $(1+c_3)$

II.) Zmiana kątów kostki



$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = tg\,\chi = \chi = \chi_1 + \chi_2$$

$$tg\,\chi_1 = b_1 \qquad tg\,\chi_2 = a_2$$

$$\chi = b_1 + a_2$$

Tożsamo: $\psi = c_2 + b_3$

$$\varphi = a_3 + c_1$$

Do tego samego rezultatu także z tego że można napisać według tego co wyżej:

$$x' = x + a_1 x + \beta z - \gamma y \quad + \frac{c_1 + a_3}{2} z + \frac{a_2 + b_1}{2} y$$
$$y' = y + b_2 y + \gamma x - \alpha z \quad + \frac{a_2 + b_1}{2} x + \frac{b_3 + c_2}{2} z$$
$$z' = z + c_3 z + \alpha y - \beta x \quad + \frac{b_3 + c_2}{2} y + \frac{c_1 + a_3}{2} x$$

$$\gamma = \frac{a_2 + b_1}{2} + \frac{a_2 + b_1}{2}$$

więc odkształcenia nasze (przedłużenia w trzech kierunkach dowolnych) można zastąpić: trzema przedłużeniami wzdłuż osi współrzędnych i trzema skrętami (przesunięciami stycznemi warstw równoległych)

Teraz jakie siły? Są one zależne od kierunku płaszczyzny powierzchni ...

Więc siły powstające:

$$X_x = \frac{1}{E}\left[a_1 - \mu(b_2 + c_3)\right] \qquad X_y = (Y_x) = \frac{2(\mu+1)}{E}(a_2 + b_1)$$

$$Y_y = \frac{1}{E}\left[b_2 - \mu(a_1 + c_3)\right] \qquad Y_z = (Z_y) = \frac{2(\mu+1)}{E}(b_3 + c_2)$$

$$Z_z = \frac{1}{E}\left[c_3 - \mu(a_1 + b_2)\right] \qquad Z_x = (X_z) = \frac{2(\mu+1)}{E}(c_1 + a_3)$$

Ten system równoważny siłom w kierunkach osi głównych dylatacji

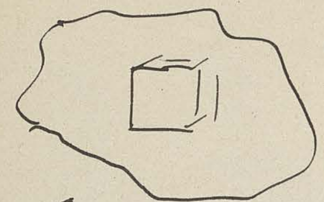
$$\lambda = \frac{1}{E}\left[P_1 - \mu(P_2 + P_3)\right]$$

$$P_1 = \frac{1}{E}\left[\lambda - \mu(\mu + \nu)\right]$$
$$P_2 = \frac{1}{E}\left[\mu - \lambda(\lambda + \nu)\right]$$
$$P_3 = \frac{1}{E}\left[\nu - \mu(\lambda + \mu)\right]$$

(tak samo jak mogliśmy zastąpić siły styczne działającemi parami normalnemi w kierunkach przekątnych)

(Który system się weźmie to zależy od kierunku płaszczyzny który Ponieważ właśnie

Naturalnie nie potrzebuję tą być właśnie ~~sześcienne~~ kostki



jeżeli ciśnienia tak dobrane że wszędzie równe pa-

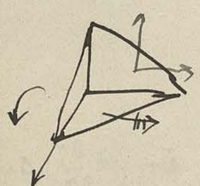
to takie same przedłużenia jednorodne i odwrotnie.

N. p. w kierunku $\overline{X}$ wszystkie jeszcze stosunek przedłużeń a w Y ...

można sobie wystawić wyciętą kostkę n. p.

Gdybyśmy byli wycięli ją w innym położeniu t. j. to tutaj na powierzchnię działałyby ciśnienia styczne. Więc ciśnienie zależy od kierunku płaszczyzny którą wystawiamy sobie wyciętą.

W jaki sposób łatwo ~~...~~ znaleźć, wycięty czworościan przez płaszczyzny



OX, OY, OZ i ~~...~~ czwartą płaszcz. której ~~...~~ normalna tworzy kąty $\alpha\ \beta\ \gamma$

Oznaczać będziemy X Y Z kierunek sił x y z kierunek płaszczyzny

Powierzchni musi ustalić równowaga. w ogólnym wypadku

w kierunku X: $X_x s_x + X_y s_y + X_z s_z - X_s s = 0$

$$X_s = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma$$

$$Y_s = Y_x \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma$$

$$Z_s = \text{— — —}$$

tutaj wielkość płaszcz. X itp. ... do powierzchni !

przy tem $X_y = Y_x$ etc. tak jak pokazano ...

Teraz jeżeli siły są zmienne i odkształcenia niejednorodne:

~~a momenty: tak ... Z: $X_y s_y + Y_z s_z$~~

a wycinając ~~kostkę~~ element objętości $(X_x' - X_x)_{dydz} + (X_y' - X_y)_{dzdx} + (X_z' - X_z)_{dydx} + \rho X\, dx\,dy\,dz = \rho\, dx\,dy\,dz \frac{d^2u}{dt^2}$

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

A momenty: jeśli nie istnieją momentów zewnętrznych

$$-(X'_y \ldots)\, dz\,dx\,dy + (Y'_x \ldots)\, dy\,dz\,dx = 0$$

$$X_y = Y_x$$

$$Y_z = Z_y$$

etc.

więc stan równowagi:

$$X_s = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma = R\cos\alpha$$

$$Y_s = X_y \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma = R\cos\beta$$

$$Z_s = X_z \cos\alpha + Y_z \cos\beta + Z_z \cos\gamma = R\cos\gamma$$

Elipsoida ciśnień

3 kierunki w których $\perp$ = osi el.

W ogólnym przypadku:

$$\xi = f(x, y, z)$$

Punkt O' $\begin{cases} x+\xi \\ y+\eta \\ z+\zeta \end{cases}$

Punkt P_1 $\begin{cases} x+\Delta x+\xi+\Delta\xi = x+\xi+\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\Delta x \\ y+\eta+\Delta\eta = y+\eta+\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x \\ z+\zeta+\Delta\zeta = z+\zeta+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\Delta x \end{cases}$

$x'+\Delta x' =$

$$P_3 \begin{cases} x+\xi+\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\xi}{\partial z}\Delta z \\ y+\eta+\left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)\Delta y+\frac{\partial\eta}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial\eta}{\partial z}\Delta z \\ z+\zeta+\ldots \end{cases}$$

Jeśli układ współrzędnych odnosimy w punkt $x+\xi$ to

$$\Delta x' = \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{\partial\xi}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial\xi}{\partial z}\Delta z$$

etc.

Więc $(P_3 - O')$ jednorodne odkształcenie $a_1 = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ $a_2 = \frac{\partial\xi}{\partial y}$ $a_3 = \frac{\partial\xi}{\partial z}$ etc.

więc $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[X_x - \mu(Y_y+Z_z)\right]$; $\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{E}\left[Y_y - \mu(X_x+Z_z)\right]$, --

$$\lambda = \frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E}X_y \quad \text{etc.}$$

ściśliwość H_2O 0·00005
Szkła 0·00015

Pb 0·000003
Cu 0·000001
Hg 0·000004

Zastosowania

I). Do elementu objętościowego, otrzymujemy dawniejsze wyrażenia

II). Odkształcenie takie że ciało pozostaje geometrycznie podobnem

$$x' = (1+\kappa)x \qquad \xi = \kappa x \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \kappa$$

$$y' = (1+\kappa)y \qquad \eta = \kappa y \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \dots = 0$$

$$z' = (1+\kappa)z \qquad \zeta = \kappa z$$

$$E = \frac{(1-2\mu)K}{3} \qquad T = \frac{(1-2\mu)K}{6(1+\mu)}$$

$$X_y = Y_z = Z_x = 0$$

zmiana objętości prop. $(1+\kappa)^3 - 1 = 3\kappa$

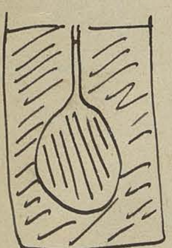
$$X_x = Y_y = Z_z = \frac{E\kappa}{1-2\mu} = p$$

więc $\dfrac{\frac{E\kappa}{1-2\mu}}{3\kappa} = \dfrac{3E}{1-2\mu} = \underline{K}$

Zatem $X_n = p \cos nx$

$Y_n = p \cos ny$ etc. zatem ciśnienie równe wszędzie i prostopadłe do ściany

zatem n.p. ciało dowolnego kształtu w piezometrze Oersteda zmienia tylko objętość.
Tak samo jak gdyby nie było puste.



Co się tam mierzy jest więc różnica ściśliwości szkła a cieczy wewnętrznej; aby tę ostatnią otrzymać trzeba i pierwszą znać.

Doświadczalnie wprost ~~[illegible]~~ nie można, więc trzeba wyrachować n.p. z E i T

Naturalnie całkiem coś innego jeżeli na ściany zewnętrzne nie działa ciśnienie

Ciśnienie kuli pustej u Langa. ~~Glinder~~ Walca wydrążonego podobnie.

III. Dowolny przekrój ~~[illegible]~~ graniastego słupa lub walca, do podstaw przyłożone p, zewnętrznie.

Symetrya wskazuje że $X_y = Y_z = Z_x = 0$, a innym równaniom zadość uczyniamy

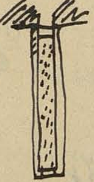
stawiając $Y_y = Z_z = 0$ $X_x = p$ z czego

Więc specyalny przypadek odkształcenia jednorodnego

$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{p}{E}$ $\frac{\partial\eta}{\partial y} = -\mu\frac{p}{E} = \frac{\partial\zeta}{\partial z}$ (znane prawo rozciągliwości drutów etc.) więc równe dla każdego przekroju

Zmiana objętości $= \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z} = (1-2\mu)\frac{p}{E}$

Na tem polega jeden sposób mierzenia μ używany przez Wertheima; rurę napełnia wodą



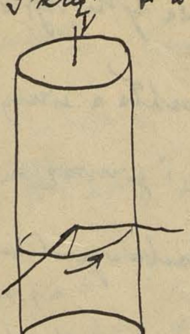
mierzy się przedłużenie $\frac{\partial\xi}{\partial x}$ i obniżenie poziomu wody z czego θ

z tego $\theta\frac{\partial\xi}{\partial x}^{-1} = 1-2\mu$ || $\mu = \frac{1-\theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^{-1}}{2}$

Ogólny przypadek odkształcenia jednorodnego (wszystkie równania stałe)

X_x = const etc. wydłużenia stałe etc. a siły poprzeczne $X_y = \ldots$

IV. Skręt walca (Odkształcenie niejednorodne)



Długość niech pozostanie niezmienna, tylko obrót przekroju prop. $y = cy$

$\xi = cyz$ $\frac{\partial\xi}{\partial y} = cz$ $\frac{\partial\xi}{\partial z} = cy$

$\zeta = -cyx$ $\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -cx$ $\frac{\partial\zeta}{\partial x} = -cy$

Więc $X_x = Y_y = Z_z = 0$ $\eta = 0$

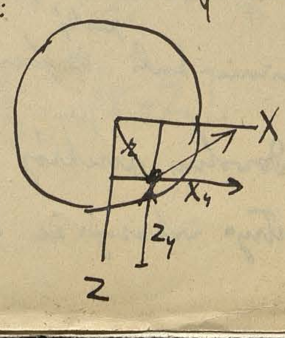
$Y_x = X_y = Tcz$

$X_y = Tcz$

$Y_z = -Tcx = Z_y$

$Z_x = 0$

Więc w przekroju:



Wypadkowa R prostopadła do promienia r i wielkości

Tcr

$T\left(\frac{kg}{mm^2}\right)$ Fe 7000
Cu 4000
Sn 1500
mosiądz 2300
Kautschuk 0·16

bo rzeczywiście wtedy $X = R \sin\varphi$:

$Y = R \cos \ldots$

Więc w każdym punkcie koła moment $T c r^2$

całkowity moment $= 2\pi \int \underbrace{r\,dr \,.\, T c r}_{\text{siła}} \,.\, \underset{\text{ramię}}{r} = \frac{\pi R^4}{2} T c$

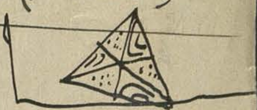
c oznacza kąt skręcenia dla długości 1 więc jeżeli podstawa walca (długości l) skręca się o φ to $c = \frac{\varphi}{l}$

Moment $= \frac{\pi R^4}{2} T \frac{\varphi}{l}$

[Także bezpośrednio zwracając że $= r T = \frac{\varphi r}{l} T\, dq$ ...

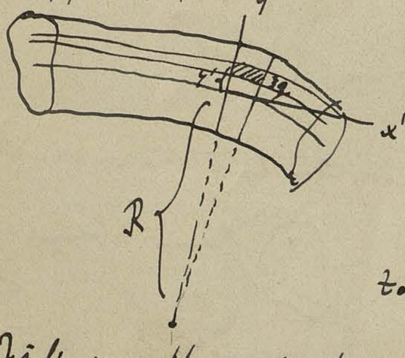
~~Ale~~ Tak prosty przypadek tylko przy walcu; inne graniastosłupy etc. wiele skomplikowańsze ponieważ przekrój nie pozostaje płaskim. (~~Nav~~ (St Venant)

Tutaj opiera tego:
$Y_x = a z \quad Y_z = -a x$
$Y_n = Y_x \cos nx + Y_z \cos nz$
$= a (z \cos nx - x \cos nz)$
Jeżeli przekrój = koło to
$z = r \sin nx \quad x = r \cos nx$
$Y_n = 0$ na obwodzie
Jednak $\gtrless 0$ jeżeli przekrój inny

Zgięcie graniastosłupa wielce cienkiego, przybliżona teorya 

Zginamy go w ten sposób że ~~punkty~~ zgięcie zostanie w płaszczyźnie XY

Przekrój prostokątny!



Pewna linia, oś, ~~nie~~ nie zmieni długości

~~Ciągnienie $X'_x = \frac{y'}{RE}$~~ Przedłużenie włókna y':

$$\frac{(R+y')\,d\varphi - R\,d\varphi}{R\,d\varphi} = \frac{y'}{R}$$

Zatem ciągnienie: $X'_x = \frac{y'}{R} E q$

Jeżeli wypadkowa $= 0$ to $\frac{1}{R} E \sum y' q = 0$ to znaczy że oś musi przechodzić przez środek ciężkości przekroju

Moment powstający:

$$M_z = \frac{E}{R} \sum y'^2 q = \frac{\Theta E}{R}$$ gdzie Θ = moment bezwładności względem osi prostopadłej do płaszczyzny

musi równoważyć momentowi siły, inaczej by kawał $(l-x)$ nie pozostał w spokoju

$$\varphi = \frac{dy}{dx} \qquad R\,d\varphi = dx \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

jeśli ciężar przy końcu nadal

$$\boxed{\Theta E \frac{d^2\eta}{dx^2} = P(l-x)}$$

Albo moment stały $\Theta E \frac{d^2\eta}{dx^2} = M$

patrz Love p. 126, 136

Tu ~~...~~ moment M_x powstający ze sił X_x i także siła Y_x równoważąca ścinanie P, (zaniedbujemy też X_y, ale zasadniczo $X_y \neq 0$). To tylko przybliżona teoria; w rzeczywistości przekroje tracą płaskość i wychylają się (Love p. 331)

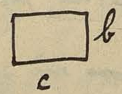
Dodatkowe warunki $\left.\begin{matrix}\eta = 0 \\ \frac{d\eta}{dx} = 0\end{matrix}\right\} x = 0$

$$\Theta E \eta = P\left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Więc obniżenie końca wolnego $(x = l)$:

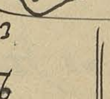
$$\eta = \frac{P}{E\Theta}\frac{l^3}{3} = \frac{(Pl)}{E\Theta}\frac{l^2}{3}$$

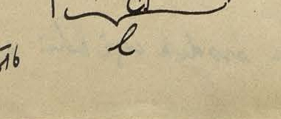
Opór przeciw przegięciu

Jeżeli n.p. przekrój = 

$$\Theta = \frac{cb^3}{12}$$ więc b wiele większy wpływ aniżeli c

$$= q\frac{b^2}{12}$$ więc przy równej ilości masy tem lepiej im większe b

Wogóle tem więcej masy zewnątrz przekroju tem lepiej  trawers żelaznych

Z tego jeśli 

$\frac{l}{2}\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$

$\frac{P}{2}\frac{l}{2}\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{4 \cdot 16}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^3$$

$$\eta = \frac{P}{E\Theta}\frac{l^3}{3 \cdot 16}$$

Taki przekrój [illegible]

$R_1 = \mu R_2$

$$a_1 = \alpha^2\lambda + \alpha'^2\mu + \alpha''^2\nu$$

$$b_2 = \beta^2\lambda + \beta'^2\mu + \beta''^2\nu$$

$$c_3 = \gamma^2\lambda + \gamma'^2\mu + \gamma''^2\nu$$

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1$$

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1$$

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0$$

$$\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0$$

$$\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0$$

$$\varphi = \beta\gamma\lambda + \beta'\gamma'\mu + \beta''\gamma''\nu$$

$$\psi = \alpha\gamma\lambda + \alpha'\gamma'\mu + \alpha''\gamma''\nu$$

$$\chi = \alpha\beta\lambda + \alpha'\beta'\mu + \alpha''\beta''\nu$$

~~Równań na 9~~

12 równań do oznaczenia wielkości $\lambda\ \mu\ \nu$, $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, $\beta\ \beta'\ \beta''$, $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$

Właściwie 6 wielkości dowolnych (bo reszta związana przez ...)

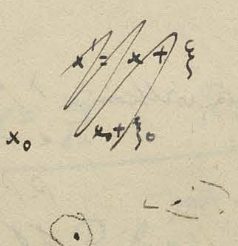
kierunki osi -- 3 }
wielkości wydłużeń -- 3 }

$$\frac{P}{E\theta}\eta = -\frac{d\varphi}{ds} \quad \Big\| \quad \frac{\partial\eta}{\partial s} = \sin\varphi$$

$$\frac{P}{E\theta}\sin\varphi = -\frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

Subsidiary relations

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$



$\lambda = \sqrt[4]{\frac{D}{\rho g}}$

$x + \Delta x$

$$x + \Delta x + \xi + \Delta_x \xi = x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\Delta z$$

$\Delta \xi + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \ldots = 0$

$$E\xi = X_x - \mu(Y_y + Z_z)$$

$$E\eta = -\mu X_x + Y_y - \mu Z_z$$

$$E\zeta = -\mu X_x - \mu Y_y + Z_z$$

$$X_x = \frac{E\begin{vmatrix} \xi & -\mu & -\mu \\ \eta & 1 & -\mu \\ \zeta & -\mu & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu \\ -\mu & 1 & -\mu \\ -\mu & -\mu & 1 \end{vmatrix}} = E\frac{\xi(1-\mu^2) + \eta(\mu^2+1) + \zeta(\mu^2+1)}{}$$

$$1 - \mu^3 - \mu^3 - \mu^2 - \mu^2 = (1+\mu)(1-2\mu)$$

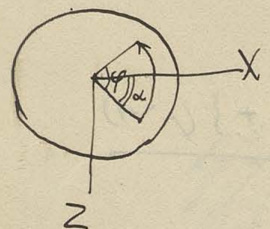
$$1 - \mu - \mu$$
$$-\mu \quad 1 \quad -\mu$$

$$= E(\xi\eta + \eta)$$

$$1 + \mu - 2\mu - 2\mu^2$$

Skręt walca skośny?

Wiemy z doświadczenia że powstają wzdęcia przy skośnie wrzynanych skrętach



$$\varphi = \frac{\varphi_0\, y}{l}$$

$$\xi = r\cos(\alpha-\varphi) - r\cos\alpha = x(\cos\varphi - 1) + z\sin\varphi$$

$$\zeta = r\sin(\alpha-\varphi) - r\sin\alpha = z(\cos\varphi - 1) - x\sin\varphi$$

$$\eta = 0$$

~~$\xi = \ldots \cos\alpha = (\cos\varphi - 1)(x \ldots - z \ldots)$~~

$$\underbrace{\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}} = 2(\cos\varphi - 1) \quad !$$

~~$\varphi = \frac{\pi}{2}$~~

więc ta ↑ znaczy powiększenie objętości tylko w razie nieskończenie małych ξ, ζ !

~~$\xi = z - x$~~

~~$\zeta = -x - z$~~

Łatwo sobie sprawę zdać że mimo wszystko musi powstać

bo dla kwadratowych dla zawsze skręty mało

ale jak wypowie rachunek ścisły ?

Ogólnie:

$\xi = cyz$ $\qquad$ ~~$X_x = Y_y = Z_z = 0$~~ $\qquad$ $X_z = 0$

$\zeta = -cyx$ $\qquad$ $X_x = Y_y = Z_z = 0$ $\qquad$ $X_y = T\left(cz + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$

$\eta = f\kappa.(xz)$ $\qquad$ $Z_y = T\left(-cx + \frac{\partial\eta}{\partial z}\right)$

$\frac{\partial}{\partial y} X_y = \frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial\eta}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial}{\partial x}(X_y) + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$ $\qquad$ $\boxed{\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\eta}{\partial z^2} = 0}$

dla pow. ~~[illegible]~~ pobocznej:

$X_n =$ ~~$X_x \cos nx$~~ $+$ ~~$X_z \cos nz$~~ $= 0$

$Y_n = Y_x \cos nx + Y_z \cos nz = 0$ $\quad \ldots\ldots$ $c(z \cos nx - x \cos nz) + \frac{\partial\eta}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\eta}{\partial z}\cos nz = 0$

$Z_n =$ ~~$Z_x \cos nx$~~ $+$ ~~$Z_z \cos nz$~~ $= 0$

$cz \sin(\varphi - (nx))$ $\qquad$ $\frac{\partial\eta}{\partial n}$

$\therefore$ ~~$\frac{\partial\eta}{\partial x}\cos nx + \frac{\partial\eta}{\partial z}\cos nz = 0$~~

$\boxed{\frac{\partial\eta}{\partial n} = 0}$

Jeśli równanie obwodu

$f(xy) = 0$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$

~~$\cos nx = \frac{\partial f}{\partial y}$ $\quad \sin nx = \frac{\partial f}{\partial x}$~~

~~$c\left(z\frac{\partial f}{\partial z} - x\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$~~

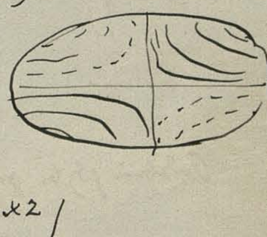
$\cos nx \sim dz = b^2x$

$\sin nx \sim -dx = a^2z$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ ~~[illegible]~~ $\frac{dz}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2z}$

~~$c(a^2z^2 + b^2x^2) + \frac{\partial\eta}{\partial x}a^2z - \frac{\partial\eta}{\partial z}b^2x = 0$~~

~~$\eta = \alpha \ldots (x^2 z^2)$~~



$\eta = \alpha x z$

~~$2\alpha(\ldots + \ldots)xz$~~

$c(b^2 - a^2)xz + \left(b^2x\frac{\partial\eta}{\partial x} + a^2z\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) = 0$

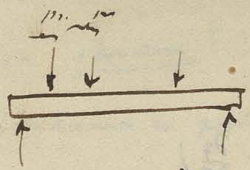
$c(b^2 - a^2) + (b^2 + a^2)\alpha = 0$ $\qquad$ $\boxed{\eta = c\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}xz}$

paraboloida hiperboliczna

Moment $= \int (X_y z - Z_y x)\,dx\,dz = Tc\left\{\frac{2a^2}{a^2 + b^2}\int z^2\,dx\,dz + \frac{2b^2}{a^2 + b^2}\int x^2\,dx\,dz\right\} = \pi T c\frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}$

X.

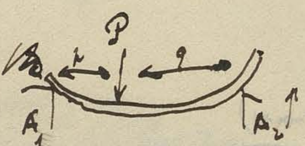
Ogólnie



$$\sum_0^l P = 0 \qquad A_0 - \sum_0^x P = V_x$$

$$M_x = A x - \sum_0^x P(x-p)$$

$$V_x = \frac{\partial M}{\partial x}$$



$$P = A_1 + A_2 = A_1\left(1 + \frac{p}{q}\right)$$

$$A_1 p = A_2 q$$

$$KE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = A_1 x \qquad = A_1 x - P(x-p)$$

$$KE\, y = A_1 \frac{x^3}{6} + ax + b$$

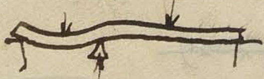
w punkcie $x = p$ $\quad y_1 = y_2$

$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_2}{\partial x}$ jeżeli $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

$x = 0 \quad x = l$

$y = 0$

z tego obliczamy a, b



Durchlaufende Träger

jeżeli dwie[?] podpory – to obliczamy tak jakby gdyby tam była wisząca do góry i przy końcu potem stawiamy jej wielkość taką aby $y = 0$ w danym punkcie

Podobnie gdyby jeden z końców umocowany, wprowadzamy tam moment wiszący [illegible]

$$K = \frac{2E}{1-\mu} \qquad T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\frac{K}{T} = \frac{3}{2(1-2\mu)(1+\mu)}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a$$

$$K\Omega + m r^2 \omega = c$$

$$m r \omega^2 = \frac{m M k}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{M k}{\omega^2}$$

$$K\Omega + m\omega\left(\frac{Mk}{\omega^2}\right)^{2/3} = c$$

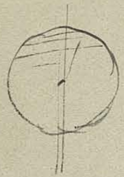
$$K\Omega + m\left(\frac{M^2k^2}{\omega}\right)^{\frac{1}{3}} = c$$

$$K\Omega + m r^2\sqrt{\frac{Mk}{r^3}} = c = K\Omega + m\sqrt{Mkr} = c$$

$$K\alpha^3 + \frac{A}{\alpha} = c$$

$$\frac{r^2}{r^3} = \mathrm{const}$$

$$\frac{d\Omega}{dt}\frac{1}{\sqrt{Mk\omega}} = -K\frac{d\Omega}{dt}$$



$$\iint 2\pi r^4 \sin\varphi \, d\varphi \, dr = \frac{3}{2}\pi \frac{r^5}{5} \frac{4}{3}$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3\pi}{20} r^2$$

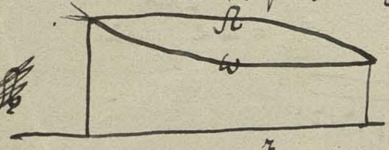
Równy czas obrotu: $\sqrt[3]{\omega} = \alpha$

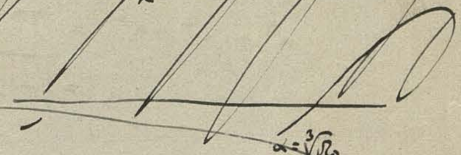
$$K\alpha^4 - c\alpha = -m\sqrt[3]{M^2k^2}$$

$$= m\sqrt[3]{\omega_0^4}\cdot r_0^2$$

$$K\alpha^4 - K\Omega_0\alpha - m r_0^2\omega_0\alpha - m\sqrt[3]{\omega_0^2}\alpha_0 = 0$$

$$K\alpha\left(\alpha^3 - \Omega_0 - \frac{m r_0^2\omega_0}{K}\right) - \ldots = 0$$





$\alpha = \sqrt[3]{\Omega_0}$

Środek ciężkości: $(K + R^2M)\Omega + (k + mr^2)\omega = c$

$$m r \omega^2 = M R \omega^2 = \frac{m M k}{(R+r)^2}$$

$$mr = MR \qquad R = \frac{mr}{M}$$

$$r^3\omega^2 = \frac{Mk}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2} = A$$

$$(K + \ldots)\Omega + (k + m r^2 + R^2M)\omega = c$$

$$\left[K + \frac{m^2}{M}\left(\frac{A}{\omega^3}\right)^{2/3}\right]\Omega + \left[k + m\left(\frac{A}{\omega^2}\right)^{2/3}\right]\omega = c$$

$$\left(K + \frac{m^2r^2}{M}\right)\Omega + (k + m r^2)\sqrt{\frac{A}{r^3}} = c$$

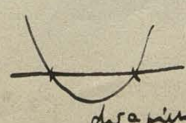
im większe r tem mniejsze Ω

$$\alpha^3 K + \frac{m^2}{M}\frac{A^{2/3}}{\alpha} + m\frac{A}{\alpha} = c$$

podstawiając α^3 Ω otrzymamy, aby wszystkie wartości większe niż c, mniejsze niż c, między nimi

$\alpha = \omega$

$\alpha = 0$



dwa pierwiastki

$$K \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda \mathfrak{E} = \text{curl } \mathfrak{H}$$

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = - \text{curl } \mathfrak{E}$$

$$e^{i(\alpha t + i\beta x)}$$

$$K \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + 4\pi\lambda \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \nabla^2 \mathfrak{E}$$

$$\mathfrak{E} = a e^{i\alpha t - \beta x}$$

$$-\alpha^2 + 4\frac{i\pi\lambda\alpha}{K} = \frac{\beta^2}{K}$$

$$\beta = \mu + i\nu$$

$$= \frac{\mu^2 - \nu^2 + 2i\mu\nu}{K}$$

$$\mu^2 - \nu^2 = -K\alpha^2$$

$$\mu\nu = 2\pi\lambda\alpha$$

$$\mathfrak{E} = a e^{i(\alpha t - \nu x) - \mu x}$$

$$= a e^{-\mu x} \sin(\alpha t - \nu x)$$

$$= a e^{-\mu x} \sin$$

$$\mu^2 - \frac{4\pi^2\lambda^2\alpha^2}{\mu^2} = -K\alpha^2$$

$$\mu^4 + \mu^2 K\alpha^2 = 4\pi^2\lambda^2\alpha^2$$

$$\mu = \sqrt{-\frac{K\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{K^2\alpha^4}{4} + 4\pi^2\lambda^2\alpha^2}}$$

$K = 1 \qquad \alpha = \frac{2\pi}{\tau}$

$$\mu^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\sqrt{1 + \lambda^2\tau^2} - 1\right]$$

$$\nu^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)\left[\sqrt{1 + \lambda^2\tau^2} + 1\right]$$

$$n_2 = \frac{c}{v} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \lambda\tau^2}}$$

$$\frac{n-1}{n+1}$$

$$n = \frac{i\beta}{\alpha} = \frac{(i\mu - \nu)}{\alpha}$$

$$\rho = \frac{i\frac{\mu}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} - 1}{i\frac{\mu}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha} + 1} = \frac{-\left[\left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) - i\frac{\mu}{\alpha}\right]\left[1 + \frac{\nu}{\alpha} - i\frac{\mu}{\alpha}\right]}{\left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2}$$

$$\rho_2 = \frac{1 - \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2}{\left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mu}{\alpha}\right)^2}$$

$$\frac{3\pi}{20} R^2 \alpha^3 + \frac{m}{M} \frac{\sqrt[3]{\omega_0^4}\, r_0^2}{\alpha} = \frac{3\pi}{20} R^2 \Omega_0 + \frac{m}{M} r_0^2 \omega_0$$

$$\frac{3\pi}{20} R^2 + \left(\frac{m}{M} r\right)^2$$

$$\left(\frac{60}{80}\right)^2$$

$$\frac{3\pi R^2}{20} \alpha^3 + \frac{m}{M} r_0^2 \omega_0 \frac{\sqrt[3]{\omega_0}}{\alpha} = \frac{3\pi R^2}{20} \Omega_0 + \frac{m}{M} r_0^2 \omega_0$$

$$\frac{3\pi}{20} \qquad \frac{1}{80} (60)^2 \frac{1}{29}$$

$$\frac{3{\cdot}14 \cdot 3}{6{\cdot}42} \qquad \frac{2 \cdot 6}{8} = \frac{3}{2}$$

$$0{\cdot}47 = 0{\cdot}5 \qquad = 1{\cdot}5$$

przybl. $\alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{1{\cdot}5}{0{\cdot}5}} = \sqrt[3]{3}$

$\alpha_1^3 = 3$ godzin

$r_1 = \sqrt[3]{\frac{\omega_0^2 r_0^3}{\omega^2}} = r_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{2/3}$

$= \frac{60}{9} r_0$

$\alpha_2 = \frac{2}{1{\cdot}5} = \frac{4}{3}$

$\alpha_2^3 = \frac{64}{27} = > 2$

59 dni

$$K \frac{d\Omega}{dt} = -\alpha \frac{(\Omega - \omega)}{r^3}$$

$$= -\alpha (\Omega - \omega) \frac{\omega^2}{MK}$$

$$\frac{d}{dt} \sum m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) = \sum Y_x - X_y$$

$$\frac{d}{dt} \sum m r^2 \frac{d\varphi}{dt} =$$

$$\frac{d}{dt} \left(K_z \frac{d\varphi}{dt}\right) = M_z$$

$$Y = a e^{-\mu x} \sin(\alpha t - \nu x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -a e^{-\mu x}\left[\mu \sin + \nu \cos\right]$$

$$N = \frac{a e^{-\mu x}}{\alpha}\left[\mu \cos(\alpha t - \nu x) - \nu \sin \ldots\right]$$

~~$a_1 \sin \alpha t = a_2 \sin \alpha t$~~

$$E \sin \alpha t + R \sin(\alpha t + \delta) = a \sin(\alpha t + \varepsilon)$$

$$-\frac{E}{c} \sin \alpha t - \frac{R}{c} \sin(\alpha t + \delta) = -\frac{a\nu}{\alpha} \sin(\alpha t + \varepsilon) + \frac{a\mu}{\alpha} \cos(\alpha t + \varepsilon)$$

$$E + R \cos \delta = a \cos \varepsilon$$

$$R \sin \delta = a \sin \varepsilon$$

$$E + R \cos \delta = a \frac{\nu c}{\alpha} \cos \varepsilon + a \frac{\mu c}{\alpha} \sin \varepsilon = a \cos \varepsilon$$

$$R \sin \delta = a \frac{\nu c}{\alpha} \sin \varepsilon - a \frac{\mu c}{\alpha} \cos \varepsilon = a \sin \varepsilon$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\frac{\mu c}{\alpha}}{\frac{\nu c}{\alpha} + 1} = \frac{\mu c}{\nu c + \alpha}$$

$$= \frac{1 - \frac{\nu c}{\alpha}}{\frac{\mu c}{\alpha}} = \frac{\alpha - \nu c}{\mu c}$$

$$= \frac{R \sin \delta}{R \cos \delta + E}$$

~~$\alpha^2 - \nu^2 c^2 = \mu^2 c^2$~~

~~$R^2 = a^2 + E^2 - 2aE \cos \varepsilon$~~

$$E^2 + R^2 + 2ER \cos \delta = a^2 = (E + R \cos \delta)^2 \, 1 +$$

$$= \text{~~}a^2\left[\left(\frac{\nu c}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\mu c}{\alpha}\right)^2\right]\text{~~}$$

$$E \sin \alpha\left(t - \frac{\mu x}{c}\right)$$

$$-\frac{\alpha E}{c} \cos$$

$$-\frac{E}{c} \sin \alpha\left(t - \frac{\mu x}{c}\right)$$

Hatteras:

$\frac{5\,km}{h}$ 125 km 220 m

Florida $8\,\frac{km}{h}$ 60 400

Florida – Afrika

= N. Y. – Europa } 60°

$$r = \frac{R}{4}$$

$$\frac{5\,km}{h} = ~~5\,000\,00~~ \qquad \omega = \frac{5\,km \cdot 24}{1600\,km}$$

$$= \frac{12}{160} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{m}{M} \quad \frac{\frac{2R\pi}{4} \cdot 125\,km \cdot \frac{1}{4}}{\frac{4 R^3 \pi}{3} \cdot 5{,}6} = \frac{3}{32} \cdot \frac{125}{(6400)^2 \cdot 5{,}6} = \frac{2}{40 \cdot 10^6} = \frac{1}{2 \cdot 10^7}$$

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{\left(\frac{R}{4}\right)^2}{\frac{3\pi}{20} R^2} = \frac{20}{3 \cdot 16 \cdot \pi} = \frac{2}{48 \cdot 3{,}1} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{3}{40}$$

$$\frac{1}{2 \cdot 10^7} \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{40} = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^7} = \frac{1}{2}\,10^{-9}$$

$$86.400' \cdot 365 = 3 \cdot 10^8$$

Die meisten Ordnungen sind an die Voraussetzung gebunden, dass die Mol. Vertheilung durchaus gleichmässig ist.

der Sättigung ... unter Voraussetzung einer gleichmässigen Vertheilung der Gesamt- abgeleitet werden, während in Wirklichkeit die Mol. in jedem Momente ungleichförmig, stellenweise dichter stellenweise dünner, ... sein müssten. Verf. berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass in einem beliebigen Volumtheil eine gewisse procentuelle Verdichtung resp. Verdünnung stattfindet; sie ist offenbar desto kleiner, je grösser man den betrachteten Volumtheil annimmt, ... so dass die mittlere Dichtigkeitsschwankung zwar ... beträgt.

... für Volumtheile ...

Würden diese Dichteunterschiede in der ... Entropieformel berücksichtigt, so erhält man ein vom üblichen abweichendes Resultat, wie ja auch thatsächlich die Bedeutung der gewöhnlichen ... auf den Fall beschränkt – der zweite Hauptsatz seine Bedeutung verlieren würde, falls man die Dichtigkeit so kleiner Volumtheile ausmitteln könnte.

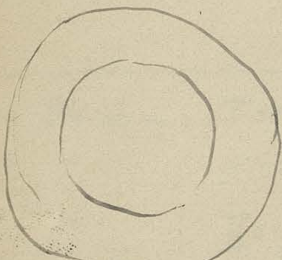
Bezüglich der v. d. W. Zustandsgleichung zeigt Verfasser, dass der „innere Druck" nur in dem Falle durch das Glied $\frac{a}{v^2}$ richtig wiedergegeben wird, falls der Bereich der Molekularanziehungskräfte gross ist im Vergleich zu jenem Raume, innerhalb dessen merkliche Dichte... vorkommen, eine Voraussetzung, die der Wirklichkeit nicht zu entsprechen scheint, und dass sich im Gegenfalle eine viel complicirtere Formel ergibt.

42

$\lambda = \rho\sqrt{m^2+s^2}$ $y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$

$E q \frac{dm}{dx} = \rho\sqrt{m^2+s^2}$

$E q m = \rho \int ds \sqrt{m^2+s^2} = s\sqrt{\ } - \int \frac{s^2}{\sqrt{\ }} ds = \int \frac{m^2+s^2}{\sqrt{m^2+s^2}} ds$



$\xi = s\frac{x}{r}$ $\eta = s\frac{y}{r}$ $\zeta = s\frac{z}{r}$

$\frac{\partial}{\partial x}(X_x) = 0$

$\sigma = A \cos t$
$= [A \cos \alpha t + B \sin \alpha t] \sin \beta x + \sum [A_1 \cos \alpha_1 t + B_1 \sin \alpha_1 t] \sin \beta_1 x$

$[A \cos \alpha t + B \sin \alpha t] \sin \beta l = A \sin \gamma t$

$B = \frac{A}{\sin \beta l}$

$\int_{x'}^{l} (x'-x)\,dx = x'x - \frac{x^2}{2} =$

$x'l - \frac{l^2}{2} - x'^2 + \frac{x'^2}{2}$

$= - \frac{(x'-l)^2}{2}$

$\theta E \frac{d^2y}{dx^2} = P(l-x) + X\frac{(x'-l)^2}{2}$

$\theta E \frac{d^3y}{dx^3} = -P + X\, 2\frac{(x'-l)}{2}$

$\theta E \frac{d^4y}{dx^4} = X$

$= \rho q \frac{d^2y}{dt^2}$

$\frac{d^4z}{dx^2} = -a^2\frac{d^2z}{dt^2}$

$$\frac{y}{R} = \mu \frac{y}{R'}$$

$$\xi = \omega x \qquad \eta = \omega y \qquad \zeta = \omega z$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \omega + \omega' \frac{x^2}{r} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \omega' \frac{xy}{r} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \omega' \frac{xz}{r}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \dots = 3\omega + \omega' r$$

$$X_x = 2T\left[\omega + \omega' \frac{x^2}{r} + L(3\omega + \omega' r)\right]$$

$$X_y = 2T \; \omega' \frac{xy}{r}$$

$$X_z = 2T \; \omega' \frac{xz}{r}$$

$$\omega' \frac{x}{r} + 2\omega' \frac{x}{r} + \omega'' \frac{x^3}{r^2} - \omega' \frac{x^3}{r^3} + 3L\, \omega' \frac{x}{r} + L\omega'' x + L\omega' \frac{x}{r}$$

$$+ \frac{\omega' x}{r} + \omega'' \frac{xy^2}{r^2} - \frac{\omega' xy^2}{r^3}$$

$$+ \omega' \frac{x}{r} + \omega'' \frac{xz^2}{r^2} - \omega' \frac{xz^2}{r^3}$$

$$= \omega' \frac{x}{r}(4 + 4L) + \omega'' x + L\omega'' x$$

$$\frac{4\omega'(1+L)}{r} + \omega''(1+L) = 0$$

$$r^4 \omega'' + 4\omega' r^3 = 0$$

$$d(\omega' r^4) = 0$$

$$\omega' r^4 = a$$

$$\omega' = \frac{a}{r^4}$$

$$\omega = -\frac{a}{3r^3} + b$$

$$3\omega + \omega' r = 3b$$

Z równowagi do ruchu zapomocą d'Alemberta

$$X_x = 2T\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \kappa\Delta\right] \qquad X_y = T\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

. . – — — – –

$$X_x = 2T\frac{\partial u}{\partial x} + \kappa\, \mathrm{div}$$

$$" (1-2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= \frac{E}{1+\mu} + \frac{E\mu}{1+\mu} = E\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta^2 u + (T+\kappa)\frac{\partial\, \mathrm{div}\, u}{\partial x}$$

. . .

. . ..

$$\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \Delta^2\theta$$

Dla cieczy: $T = 0$

$\mu = \frac{1}{2}$

$$\kappa = \frac{2T\mu}{1-2\mu}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} = \frac{T\,2(1+\mu)}{3(1-2\mu)}$$

$X_x \sim \Delta \quad Y_y \sim \Delta \quad Z_z \sim \Delta \qquad X_x = Y_y = Z_z = p$

$(\rho - \rho_0)$ $\qquad p = f(\rho)$

wiemy że $X_x = p \ (\sim \rho)$ jeśli temp. niezmienna

$$L = \mu\frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)}$$

~~...~~ = =

$$2T\frac{\partial \xi}{\partial x} + L\Delta$$

~~$3K = \frac{E}{1+\mu}\left[1 + 3\frac{\mu}{1-2\mu}\right]$~~ ~~$\frac{1+\mu}{1-2\mu}$~~

44

$$x' = x + a_1 x + a_2 y + a_3 z = x(1+a_1) + \left(\frac{a_2+b_1}{2}\right) y + \left(\frac{a_3+c_1}{2}\right) z + \frac{a_2-b_1}{2} y + \frac{a_3-c_1}{2} z$$

$$y' = y + b_1 x + b_2 y + b_3 z = y(1+b_1) \frac{b_1+a_2}{2} x + \frac{b_3+c_2}{2} z + \frac{b_1-a_2}{2} x + \frac{b_3-c_2}{2} z$$

$$z' = $$

$$=$$

$$x' = x(1+a_1) + \frac{a_2+b_1}{2} y + \frac{a_3+c_1}{2} z \;\Big|\; + \frac{a_2-b_1}{2} y - \frac{c_1-a_3}{2} z$$

$$y' = y(1+b_1) + \frac{a_2+b_1}{2} x + \frac{b_3+c_2}{2} z \;\Big\}\; \frac{a_2-b_1}{2} x + \frac{b_3-c_2}{2} z$$

$$z' = z(1+b_1) + \frac{c_1+a_3}{2} x + \frac{c_2+b_3}{2} y \;\Big|\; + \frac{c_1-a_3}{2} x - \frac{b_3-c_2}{2} y$$

$$\frac{a_2+b_1}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \varepsilon = (1+\mu)\frac{p}{E} = (1+\mu)\frac{X_y}{E}$$

$$a_1 =$$

~~xz~~ wydłużenie w kierunkach osi i ścinania można też zastąpić wydłuż. w 3 prost. kierunk.

$$x_2 = (1+\lambda)\left[u x + v y + w z\right] \qquad y_2 = (1+\mu)\left[u' x + v' y + w' z\right] \qquad z_2 = (1+\nu)\left[\right.$$

$$x_3 = u x_2 + u' y_2 + u'' z_2$$

$$= x\left[(1+\lambda)u^2 + (1+\mu)u'^2 + (1+\nu)u''^2\right] + y\left[(1+\lambda)uv + (1+\mu)u'v' + (1+\nu)u''v''\right]$$

$$+ z\left[(1+\lambda)uw + (1+\mu)u'v' + (1+\nu)u''v''\right]$$

$$x_3 = x\left[1 + \lambda u^2 + \mu u'^2 + \nu u''^2\right] + y\left[\lambda uv + \mu u'v' + \nu u''v''\right] + z\left[\qquad\right]$$

$$y_3 =$$

$$z_3 =$$

$$(x+iy) = 1 - e^{-w} + \sqrt{e^{-2w}-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2w}-1}$$

$$\operatorname{arctg} = \int_0^u \frac{du}{1+u^2}$$

$w = \varphi + i\psi$

I). $\psi = 0 \quad 0 < \varphi < -\infty$

$$x = 1 - e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi}-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2\varphi}-1}$$

$y = 0$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

II). $\varphi = -\infty \;\|\; 0 < \psi < \pi$

$$x = 1 - 2e^{-\varphi}\cos\psi + \frac{\pi}{2}$$

$$y = 2e^{-\varphi}\sin\psi$$

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{x^2+y^2}\cos$$

$$\sqrt{Re^{i\theta}} = \sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{R+x}{2}} + i\sqrt{\frac{R-x}{2}}$$

III). $\psi = \pi \quad -\infty < \varphi < 0$

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}-1} + \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2\varphi}-1} \qquad \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}$$

$y = 0$

$2+\pi < x < \infty$

IV). $\psi = \pi \quad 0 < \varphi < \infty$

$$\operatorname{arctg} iu = i\,\operatorname{\mathfrak{tg}}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$$

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \pi$$

$$y = \sqrt{1-e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2}\lg\frac{1+\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}$$

V). $\varphi = \infty \quad 0 < \psi < \pi$

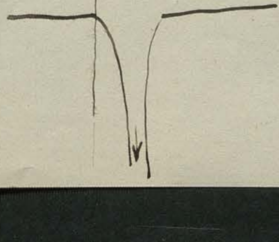
$x = 1 + \psi$

$y = 1 - \lg 2 - \varphi \qquad (y = -\infty)$

VI). $\psi = 0 \quad 0 < \varphi < \infty$

$$x = 1 - e^{-\varphi}$$

$$y = \sqrt{1-e^{-2\varphi}} + \frac{1}{2}\lg\frac{1+\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}{1-\sqrt{1-e^{-2\varphi}}}$$



Efflux of gas

~~$p = p_0$~~ $\int \frac{dp}{\rho} = -\frac{V^2}{2} + c$

$$V^2 = \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \frac{p}{p_0}^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

$$= \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(1 - \frac{p_0 - p}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

$$= \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \left(1 - \frac{k-1}{k}\frac{p_0-p}{p_0} + \frac{1}{2}\frac{k-1}{k^2}\left(\frac{p_0-p}{p_0}\right)^2 + \dots\right)\right]$$

$$= 2\frac{p_0}{\rho_0}\frac{p_0-p}{p_0}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{1}{k}\left(\frac{p_0-p}{p_0}\right)^2 + \dots\right]$$

więc dla małych $\frac{p_0-p}{p_0}$ prawo Bunsena $V^2 \sim \frac{1}{\rho_0}$ dla różnych gazów

Maxim $V = \sqrt{\frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}}$ $\qquad V^2 = \frac{2}{k-1}(c_0^2 - c^2)$

według tego wzoru

tymczasem Reynolds wygrał: $V \leqq c$

$$c^2(k-1) = 2c_0^2 - 2c^2$$

$$c^2 = \frac{2c_0^2}{k+1}$$

$$V_M^2 = \frac{2}{k-1}\left(c_0^2 - \frac{2c_0^2}{k+1}\right) = \frac{2c_0^2}{k+1}$$

$$V_M^2 = \frac{2k}{k+1}\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{2k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1 - \frac{p_M}{p_0}^{\frac{k-1}{k}}\right]$$

$$1 - \frac{k-1}{k+1} = \left(\frac{p_M}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1}$$

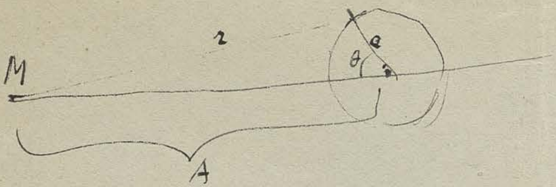
$$p_M = p_0\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}$$

krytyczne ciśnienie

V się nie zmieni jeśli p spadnie poniżej p_M

Emden, Mach, Salcher

$\omega^2 \frac{A^2}{2}$ $\qquad \frac{\omega^2 A^2}{2} = \frac{kM}{A}$



$$U = \frac{kM}{\sqrt{A^2+a^2-2aA\cos\theta}} + \frac{\omega^2}{2}(A-a\cos\theta)^2$$

$$= \frac{kM}{\sqrt{\quad}} + \frac{kM}{A^3}(A-a\cos\theta)^2$$

$$= \frac{kM}{A}\left\{\left[1+\frac{a^2}{A^2}-\frac{2a}{A}\cos\theta\right]^{-1/2} + \left(1-\frac{a}{A}\cos\theta\right)^2\right\}$$

$$= \frac{kM}{A}\left[1 - \frac{a^2}{2A^2} - \frac{a}{A}\cos\theta - \frac{3}{2}\frac{a^2}{A^2}\cos^2\theta + 1 + 2\frac{a}{A}\cos\theta + \frac{a^2}{A^2}\cos^2\theta\right.$$

$$= -\frac{kM}{(A^2-2aA\cos\theta+a^2)^{1/2}} + \frac{kM}{A^2}a\cos\theta$$

$$= \frac{3}{2}M\frac{ka^2}{A^3}\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right) \qquad g = \frac{kM_\delta}{a^2}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{M}{M_\delta}\left(\frac{a}{A}\right)^3 a\left(\cos^2\theta-\frac{1}{3}\right)$$

0·79 feet ☉ $\qquad$ =

1·80 feet ☾

[illegible]

Larmor Analysator

Elektrizität

[illegible]

Astr. Nachr. 28–29 f.

$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$

~~$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$~~

$\mu \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)$

$p^2 = p_0^2 + \frac{x}{l}(p_1^2 - p_0^2)$

$2p \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_1^2 - p_0^2}{l} = \frac{2p}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \alpha$

$r \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\alpha}{p} \frac{\int r\, dr}{2} = \frac{\alpha}{p} \frac{r^2}{4} + \beta$

$u = \frac{\alpha}{p} \frac{r^2}{8} + \gamma$

$0 = \frac{\alpha}{p} \frac{R^2}{8\mu} + \gamma$

$u = \frac{\alpha}{p} \frac{r^2 - R^2}{8\mu}$

$Vol_p =$

$2\pi \int r u\, dr = \frac{2\pi\alpha}{p \cdot 8\mu}\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}\right) = \frac{\pi\alpha R^4}{16 p\mu}$

$Vol_{\frac{p_1+p_2}{2}} = Vol_p \cdot \frac{p}{\frac{p_1+p_2}{2}} = \frac{\pi\alpha R^4}{8\mu(p_1+p_2)} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_0)}{8\mu l}$

$X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$X_x = -p + \lambda\, \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$

Y_y

Z_z

$3\lambda + 2\mu = 0$

$p = \frac{X_x + Y_y + Z_z}{3}$

$X_x = p + \frac{2}{3}\mu\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$

$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u$

48

$\frac{Ca}{\mu}\rho \ll$

$p = A\frac{x}{r^3}$

$u = -\frac{3}{4}\frac{Cax^2}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) + c\left(1-\frac{3}{4}\frac{a}{r}-\frac{1}{4}\frac{a^3}{r^3}\right)$

$v = -\frac{3}{4}\frac{caxy}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)$

$w =$

$p_{rx} = \frac{x}{r}p_{xx} + \frac{y}{r}p_{xy} + \frac{z}{r}p_{xz} = - \qquad = -\frac{x}{a}p_0 + \frac{3}{2}\mu\frac{c}{a}$

$p_{ry} = -\frac{y}{a}p_0$

$p_{rz} = -\frac{z}{a}p_0$

$u = a + b\left(\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\right) - c\left(\frac{x^2}{r^3}+\frac{1}{r}\right)$

$v = 3b\frac{xy}{r^5} - c\frac{xy}{r^3}$

$w = 3b\frac{xz}{r^5} - c\frac{xz}{r^3}$

$\Delta p = 0$

$\Delta V = \frac{1}{\mu}p$

$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u'$

$v = \frac{\partial V}{\partial y} + v'$

$w = \frac{\partial V}{\partial z} + w'$

$\left.\begin{array}{l}\Delta u' \\ \Delta v' \\ \Delta w'\end{array}\right\} = 0$

$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{\mu}p$

$p = 2c\mu\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x}$

$V = ax + b\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} + c\frac{\partial r}{\partial x}$

$w' = v' = 0 \qquad u' = -\frac{2c}{r}$

$X = 6\pi\mu a c$

$\Delta^2\left(\frac{xy}{r^4}\right)$

$\Delta^2\left(\frac{x^m}{r^4}\right)$

Wynika z tego że 1) ugięcie przez y 2). skręcenia = 0 3). obroty w XY przy x, YZ przy z

$$v = \frac{1}{2R}\left(x^2 + \mu y^2 - \mu z^2\right)$$

$$w = \frac{\mu}{R}\, yz$$

$$u = -\frac{1}{R}\, yx$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{R} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{R} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{R} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mu y}{R} \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\mu z}{R}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\mu z}{R} \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\mu y}{R}$$

$$\Delta = \frac{y}{R}(2\mu - 1)$$

$$X_x = -2T\frac{y}{R} + K\frac{y}{R}(2\mu-1) = -\frac{y}{R}\left(\frac{E}{\mu+1} + (1-2\mu)\frac{E\mu}{1+\mu\,(1-2\mu)}\right) = -y\frac{E}{R}$$

$$Y_y = 2T\frac{\mu y}{R} + K\frac{y}{R}(2\mu-1) = +\frac{y}{R}\left(\frac{\mu E}{1+\mu} - \frac{E\mu}{1+\mu}\right) = 0$$

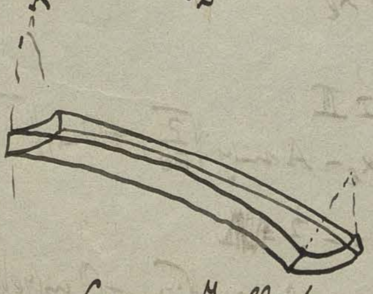
$$Z_z = 0$$

$$X_y = 0 = X_z = Y_z$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{R} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\mu}{R}$$

Kąt przegięcia końcowy

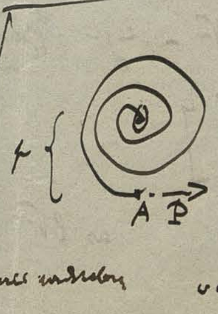
$$\Delta\varphi = \frac{M}{E\Theta}\, l$$



Cornu, Mallock

Patrz także Love p. 331

Sprężyna spiralna



Wyobraźmy sobie A przymocowane

O okręcone: powstaje moment

kąta $O = M = pP$

każda część sprężyny ten sam moment

wtedy $\Delta\varphi = \frac{pP\, l}{E\Theta}$

[illegible]

$u = y\,c\,(2a + 6bx)$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 6bcy$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2ax + 3bx^2$

$v = ax^2 + bx^3 - 6bcy\mu$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2(a + 3bx)c$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$w =$

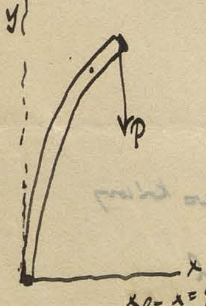
$x = \pm h$

$X_y = 2T\left[ac + 3bxc + 2ax + 3bx^2\right] = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3bc + 2a = 0 \\ ac + 3bh^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = -\frac{3bc}{2} \\ -\frac{3bc^2}{2} + 3bh^2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c^2 = 2h^2 \\ c = h\sqrt{2} \\ a = -\frac{3bh}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$X_z = 0$

$X_x = 2T\left[6bcy\right] + \kappa\left[6bcy\right] = \frac{E}{\mu+1} + \frac{\mu E}{(\mu+1)(1-2\mu)} = \frac{E(1-\mu)}{(\mu+1)(1-2\mu)} \cdot 6bcy$



moment sity $P(x_l - x) = \frac{E\Theta}{R} = E\Theta \frac{d^2x}{dy^2}$

I II

$y = 0: \; x = 0; \; \frac{dx}{dy} = 0;$

III

$y = l: \; x = x_l$

$P\xi = -E\Theta \frac{d^2\xi}{dy^2}$

$\xi = A \sin\left(y\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right) + B\cos\left(y\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right)$

I II

$x = x_l - A\sin\left(y\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\right) + B\cos\left(y\sqrt{\cdots}\right)$

$x_l = -B$

$0 = -A\sin(y_l\sqrt{\cdots}) + B\cos(y_l\sqrt{\cdots})$

$A = B\,\mathrm{ctg}(l\sqrt{\cdots}) = -x_l\,\mathrm{ctg}\ldots$

$x = x_l\left[1 + \cos y\sqrt{\cdots} - \sin y \cdots \mathrm{ctg}\,y_0\right]$

$= x_l\left[1 - \frac{\sin(y - l)\sqrt{\cdots}}{\sin l\sqrt{\cdots}}\right]$

$\frac{dx}{dy} = -\frac{x_l\sqrt{\cdots}}{\sin l\sqrt{\cdots}}\cos(y - l)\sqrt{\cdots}$ $\qquad \cos l\sqrt{\cdots} = 0$ $\qquad l\sqrt{\frac{P}{E\Theta}} = \frac{\pi}{2}$

więc tylko wtedy równowaga taka możliwa jeżeli długość mniejsza $< \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}$ to zupełne zginanie pręta, jeżeli > to zupełne przejście tak że pręta rachunek niemożliwy

99/63

III. (23)

Teorja
Sprężystości

soziierten einwertigen Elektrolyten, welche im normalen Gleichgewichtszustande im betrachteten Volum eine Anzahl $\frac{\nu}{2}$ positive und $\frac{\nu}{2}$ negative Ionen enthalten würde. Die Schwankungen der Gesamtzahl derselben sind uns gleichgültig, nicht aber die Schwankungen der relativen Konzentration der beiden Ionenarten, welche das Auftreten positiver oder negativer Ladungen verursachen müssen. Nimmt z. B. die Anzahl der Kationen von $\frac{\nu}{2}$ auf $\frac{\nu}{2}(1 + \delta)$ zu, die Anionenzahl auf $\frac{\nu}{2}(1 - \delta)$ ab, so entspricht dies einer Arbeitsleistung, dem osmotischen Druck gegenüber, von $\frac{H\Theta}{N}\,\frac{\nu\delta^2}{2}$, also findet man nach Formel (4) für die mittlere Überschußladung

$$\sqrt{\overline{E^2}} = e\sqrt{\nu}, \qquad (10)$$

wo e die spezifische Elektronenladung bezeichnet. Wäre diese, bereits von Bateman[1]) abgeleitete Formel allgemein anwendbar, so müßte z. B. ein in den Elektrolyten eingetauchter Faradayscher Käfig, mit einem Elektroskop verbunden, bequem meßbare Ladungen von wechselndem Vorzeichen und von der Größenordnung mehrerer elektrostatischer Einheiten anzeigen.

Soweit haben wir jedoch nur den die Diffusion bewirkenden osmotischen Druck in Rechnung gezogen, wie wenn es sich um eine Mischung von Stickstoff und Sauerstoff handeln würde, während doch in Wirklichkeit einer Entfernung von normaler Verteilung auch gleichzeitig die dabei entstehenden elektrostatischen Potentialkräfte entgegenwirken müssen. Deren Einfluß hängt allerdings auch von der Gestalt des mit Ionen erfüllten Raumes, sowie von der Art der Umgebung ab, aber seine Größenordnung erhalten wir, wenn wir uns denselben als Kugel (vom Radius a) vorstellen, welche mit einem größeren Reservoir mittels einer sehr langen und sehr dünnen Röhre in Verbindung steht.

Das Auftreten einer Oberflächenladung E auf jener Kugel ist dann mit einer elektrischen Arbeit von der Größenordnung

$$\frac{1}{2}\frac{E^2}{aK} = \frac{1}{2}\frac{\nu\delta^2 e^2}{aK}$$

verbunden (wo K die Dielektrizitätskonstante des Mediums bedeutet), welche zu der osmotischen Arbeit zu addieren ist.

Somit ergibt sich in diesem Falle eine mittlere positive oder negative Überschußladung im Betrage von:

1) H. Bateman, Phil. Mag. **21**, 745, 1911.

daß das Gesamtvolumen
hängt (Bose), oder ob
Richtkräfte ins Spiel t
§ 15. Dagegen läß
titativ leicht z. B. für
eine äußere magnetisch
chen aus para- oder
einwirkt. Sind es z.
ellipsoide vom Volume
klein vorausgesetzt),
parallel den magnetisch
und zwar mit einem

$\frac{4}{5}\pi\eta^2 V\varkappa^2$

Die Molekularbewegun
stellung entgegen, un
man beispielsweise
Häufigkeit der paral
Stellungen (bezogen
sich verhält wie 1 : e
Setzt man Zahlen
daß sich durch Wah
dien (Eisenchloridlösu
und Feldstärken lei
realisieren lassen, so
allelrichtung (Sättigun
mäßige Anordnung.
Diese Erscheinung
mikroskopisch beob
folgen, ein indirekt d
ist übrigens schon
nämlich die Ersche
Doppelbrechung und
mus²), welche an
lösungen (Majoran
sowie an in Flüssig
pulvern (Meslin,
lich haben Zeema
selben Phänomene
regung eines elektr
Daß in diesen Fäll
der elektrischen bz
proportionale Wirkung
der Zustand von
der Kriställchen seh
lich hängt ja die ga
Langevin begründ
magnetismus, sowie
an homogenen Fl
scheinungen hiermi
derselben das Bolt

1) Von Prof. Poc
Bemerkung Maugain
gemacht, wonach si
Schwarmanordnung b
Flimmern zu erkenn
Felde verschwindet.
2) ... ton und M
G. Mes... C. R. 136
1903; ... 182, 1903;
P. Zee... C. M
Amste... 570, 92

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{E\theta} y = 0$$

$$y = A \sin \alpha x = A \sin \frac{k\pi x}{l} \qquad \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = \frac{P}{E\theta}$$

$$+ \sum a \sin \frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k^2\pi^2}{l^2} A \sin \frac{k\pi x}{l} - \sum \frac{m^2\pi^2}{l^2} \ldots$$

$$U = \frac{E\theta}{2} \int \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{E\theta}{2} \frac{l}{2} \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 (A + a_k)^2 + \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 a_m^2 \right]$$

$$V = \frac{P}{2} \int \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

$$= \frac{P}{2} \frac{l}{2} \left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 (A + a_k)^2 + \sum \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 a_m^2 \right]$$

$$\underbrace{\left[E\theta \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right]}_{=0} (A + a_k)^2 + \sum a_m^2 \left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 E\theta - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 P \right] > \underbrace{\left[E\theta \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 - P \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \right]}_{=0} A^2$$

$$\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 E\theta > \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 P$$

$$m^4 > k^2 m^2$$

$$m > k$$

dla dowolnego m ≥ 1 potrzeba więc tylko $k = 1$

z wyjątkiem [illegible] ↑

w razie jeśli $\delta V = 0$ to znaczy jeśli końce przytrzymane w przyjętej odległości:

$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 (A + a_k)^2 + \sum a_m^2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 > \left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 A^2$$

$$k^4 (A + a_k)^2 + \sum m^4 a_m^2 > A^2 k^4$$

~~tylko możliwe jeśli~~

przy równoczesnym:

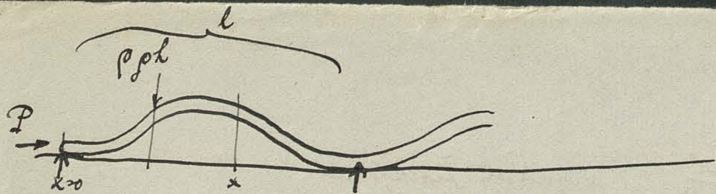
$$k^2 (A + a_k)^2 + \sum m^2 a_m^2 = k^2 A^2 \nearrow$$

z powodu niezmiennej długości

$$\sum (m^4 - m^2 k^2) a_m^2 > 0$$

tylko możliwe jeśli $m^2 > k^2$

stąd $k = 1$



M_0 –

$$-Mx + \rho g h \int_0^x (x-\xi)\, d\xi + Py = -E\theta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$-M + \rho g h x + P\frac{dy}{dx} = -E\theta \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{P}{E\theta}\frac{dy}{dx} + \frac{\rho g h}{E\theta} x = \frac{M}{E\theta}$$

$$+B + \frac{\rho g h l^2}{8P} - \frac{\rho g h}{2P}\left(x - \frac{l}{2}\right)^2$$

$$y = A \sin\left(x\sqrt{\frac{P}{E\theta}} + \varepsilon\right) - \frac{\rho g h}{P}\frac{x^2}{2} + B + \frac{M}{P}x$$

$x = 0$

$y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$$M = \rho g h \frac{l}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} & B + A\sin\varepsilon = 0 \\ & A\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\cos\varepsilon + \frac{M}{P} = 0 \\ & \frac{M}{P}\sqrt{\frac{E\theta}{P}} + A\cos\varepsilon = 0 \end{aligned}\right\}$$

$x = l$

$y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$$y = B\left(1 - \cos x\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right) - \frac{M}{P}\sqrt{\frac{E\theta}{P}}\sin x\sqrt{\frac{P}{E\theta}} + \frac{M}{P}x - \frac{\rho g h}{P}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$y = B\left[1 - \cos x\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right] + \frac{\rho g h l}{2P}\left[x - \sqrt{\frac{E\theta}{P}}\sin x\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right] - \frac{\rho g h}{P}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = B\left[1 - \cos l\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right] - \frac{\rho g h l}{2P}\left[\sqrt{\frac{E\theta}{P}}\sin l\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right] \\ 0 = B\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\sin l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} - \frac{\rho g h l}{2P}\cos l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} - \frac{\rho g h l}{2P} \end{cases}$$

$$B = \frac{\rho g h l}{2P}\sqrt{\frac{E\theta}{P}}\, \mathrm{ctg}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$\left[\sqrt{\frac{E\theta}{P}}\sin l\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right]\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\sin l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} - \left[1 - \cos l\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\right]\left[\cos l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} + 1\right]$$

~~$\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\sin l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} + 2\cos l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} = 1$~~

$$\sin^2 l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} + 1 - \cos^2 l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} = 0$$

$$1 = 1$$

zatem jeden z warunków już przez się spełniony

więc jedna wielkość pozostaje dowolną

y rowne ~~[illegible]~~ usunięte,

~~[illegible]~~ tak długo dopóki $\frac{l}{4}\sqrt{\frac{P}{E\theta}} = \frac{\pi}{2}$

to znaczy dopóki $P < 4 E\theta \frac{\pi^2}{l^2}$ (Euler'sche Knickformel!)

~~[illegible]~~

Ciężar Desny przy tym stopniu przybliżenia nie zmienia tego

chyba przy wyższym przybliżeniu

$$M_0 - Mx + \rho g h \int_0^x (x-\xi)\frac{d\xi}{\cos\varphi} + Py = -E\theta \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

$$M_0 - Mx + \rho g h \int_0^x (x-\xi)\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2\right)d\xi + Py = -E\theta \frac{d^2y}{dx^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$M_0 - Mx + \rho g h \int_0^x (x-\xi)\,d\xi + Py + \frac{\rho g h}{2}\int_0^x (x-\xi)\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi = -E\theta \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{2}E\theta \frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

trzeba by y rozłożyć: $y = y_0 + y_1$, przyczem y_0 zadość czyni pierwotnemu równaniu

a dodatkowe y_1 ano wyłoby się z powyższego.

$$B \sin \cdot = \frac{\rho g h l}{2P}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}} \cos$$

$$B\sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \sin \cos = \frac{\rho g h l}{2P} \cos$$

$$B = \frac{\rho g h l}{2P}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\, \mathrm{ctg}\, \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

$$y = \frac{\rho g h l^2}{8P} - \frac{\rho g h}{2P}\left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{\rho g h l}{2P}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\, \mathrm{ctg}\, \frac{l}{2}\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\; 2\sin^2\frac{x}{2}\sqrt{\frac{P}{E\Theta}} - \frac{\rho g h l}{2P}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\; 2\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cdots}\cos\frac{x}{2}\sqrt{\cdots}$$

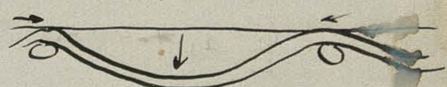
$$= \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^2}{4} - \left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + l\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\; 2\,\frac{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cdots}}{\sin\frac{l}{2}\sqrt{\cdots}}\left(\cos\frac{l}{2}\sqrt{\cdots}\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cdots} - \sin\frac{l}{2}\sqrt{\cdots}\cos\frac{x}{2}\sqrt{\cdots}\right)\right]$$

$$\left(\cdots\right) = \sin\frac{x-l}{2}\sqrt{\cdots}$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^2}{4} - \left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + 2l\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\;\frac{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\,\sin\frac{x-l}{2}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}}{\sin\frac{l}{2}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}}\right]$$

$$y_{max} = y_{\frac{l}{2}} = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^2}{4} - 2l\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\;\frac{\sin^2\frac{l}{4}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}}{\sin\frac{l}{2}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}}\right] = \frac{\rho g h l}{2P}\left[\frac{l}{4} - \sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\,\mathrm{tg}\,\frac{l}{4}\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\right]$$

dla małych $\frac{P}{E\Theta}$: $\quad \mathrm{tg}\, x = x\,\frac{\left(1-\frac{x^2}{6}\right)}{1-\frac{x^2}{2}} = x\left(1+\frac{x^2}{3}\right)$



$$y_{max} = \frac{\rho g h l}{2P}\left[\frac{l}{4} - \sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\,\frac{l}{4}\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}\left(1+\frac{l^2}{48}\frac{P}{E\Theta}\right)\right]$$

$$= -\frac{\rho g h l^4}{384 \cdot E\Theta}$$

W takim razie tu: $\quad y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + \ldots$

$$24ax + 6b + \frac{\rho g h}{E\Theta}x = \frac{\rho g h l}{2E\Theta} \qquad a = -\frac{\rho g h}{24 \cdot E\Theta} \qquad b = \frac{\rho g h l}{12 E\Theta}$$

$$\left.\begin{array}{l} al^2 + bl + c = 0 \\ 4al^2 + 3bl + 2c = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -al^2 + c = 0 \\ -2al^2 + 2c = 0 \end{array} \rightarrow \quad c = al^2$$

$$b = -2al$$

$$= -\frac{\rho g h x^2 (x-l)^2}{24 \cdot E\Theta}$$

$$y = \frac{\rho g h}{24 \cdot E\Theta}\left[-x^4 + 2lx^3 - l^2x^2\right]$$

$$y_{max} = y_{\frac{l}{2}} = -\frac{\rho g h l^4}{384 \cdot E\Theta}$$

$$y = A\sin(\alpha x+\varepsilon) + f$$

$$-\alpha^3 A\cos(\alpha x+\varepsilon) + \frac{P}{E\theta}\alpha A\cos(\alpha x+\varepsilon) + \frac{d^3f}{dx^3} + \frac{P}{E\theta}\frac{df}{dx} = \frac{\rho g h}{E\theta}\left[\frac{l}{2} - x\right]$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$\frac{d^4f}{dx^4} + \alpha^2\frac{d^2f}{dx^2} = \beta^4$$

~~$f = x^4 + x^2$~~

~~$f = \frac{\beta^4 x^4}{4!} - a x^2$~~

~~$\beta^4 + \alpha^2\frac{\beta^4 x^2}{2}$~~ ~~$f = a x^4 + b x^2 + c x^6$~~

~~$24a + \alpha^2\left[12 a x^2 + 2b\right] - \beta^4 = 0$~~

$$f = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \cdots$$

$$4!\,a_2 + \frac{6!}{2!}a_3 x^2 + \frac{8!}{4!}a_4 x^4 + \frac{10!}{6!}a_5 x^6 \cdots$$

$$+\alpha^2\left[2a_1 + 4.3\,a_2 x^2 + 6.5.a_3 x^4 + 8.7.a_5 x^6\right] - \beta^4 = 0$$

$$4!\,a_2 + 2a_1\alpha^2 - \beta^4 = 0 \qquad a_2 = \frac{\beta^4}{4!} - \frac{2a_1\alpha^2}{4!} \qquad a_1 = \frac{\beta^4 - 4!\,a_2}{2\alpha^2}$$

$$\frac{6!}{2!}a_3 = -4.3\,a_2\alpha^2 \qquad a_3 = -\frac{4!\,a_2\alpha^2}{6!}$$

$$\frac{8!}{4!}a_4 = -6.5\,a_3\alpha^2 \qquad a_4 = -\frac{6!\,a_3\alpha^2}{8!} = \frac{4!}{8!}a_2\alpha^4$$

~~$f = a_0 + \beta^4$~~

$$a_5 = -\frac{8!\,a_4\alpha^2}{10!} = -\frac{4!}{10!}a_2\alpha^6$$

$$f = a_0 + \frac{\beta^4 - 4!\,a_2}{2\alpha^2}x^2 + a_2\left\{\frac{4!\,x^4}{4!} - \frac{4!}{6!}\alpha^2 x^6 + \frac{4!}{8!}\alpha^4 x^8 - \frac{4!}{10!}\alpha^6 x^{10} \cdots\right\}$$

$$= a_0 + \frac{\beta^4 x^2}{2\alpha^2} - \frac{4!\,a_2}{\alpha^4}\left\{\frac{(\alpha x)^2}{2!} - \frac{(\alpha x)^4}{4!} + \frac{(\alpha x)^6}{6!} \cdots\right.$$

$$= a_0 + \frac{\beta^4 x^2}{2\alpha^2} + A\left[1 - \cos(\alpha x)\right] + B\sin\alpha x$$

57

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

$y = \sin \alpha t \; f(x)$ $\sin \frac{a k^2}{l^2}$

$\alpha^2 f = a^2 f^{IV}$

$f = e^{\beta x}$

$\frac{\alpha^2}{a^2} = \beta^4$ $\beta = \pm i \frac{\alpha}{a}$

$\sin \frac{\alpha}{a} x$

$\cos \frac{\alpha}{a} x$

$\sinh \frac{\alpha}{a} x$

$\cosh \frac{\alpha}{a} x$

$=$

$M = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

$P = \frac{\partial M}{\partial x}$

$\int x \, (\varphi x)$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x (x-\xi) f(\xi) \, d\xi + P_{\xi}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \int_0^x f(\xi) \, d\xi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\varphi(x)} \psi(x, \xi) \, d\xi =$$

Ohne Kreis [illegible]

$$u = A(\cos x' + \cosh x') + ~~B(\cos x' - \cosh x')~~$$
$$+ C(\sin x' + \sinh x') + ~~D(\sin x' - \sinh x')~~$$

$$(\cosh m - \cos m)^2 = \sinh^2 m - \sin^2 m$$

$$[\cosh^2 m - \sinh^2 m = 1]$$

~~$\cosh m$~~

$$\cos m \cosh m = 1$$

m fast genau $= \frac{2k-1}{2}\pi$

~~$\#$~~ $n \sim 1, (3)^2, (5)^2 \cdots$

$$y = a \sin \alpha x = a \sin x \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$

$$E\theta \frac{d^2y}{dx^2} = -yP$$

$$l \sqrt{\frac{P}{E\theta}} = \pi, k\pi$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{E\theta}$$

$$P = \frac{E\theta}{l^2} \pi^2 k^2$$

$y = e^{\gamma x}$ || $\gamma^4 + \frac{P}{E\Theta}\gamma^2 + \frac{\rho g}{E\Theta} = 0$

$$M = M_0 + \rho g \int_0^x y_\xi \, d\xi (x - \xi) = -(E)\Theta \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{\rho g}\frac{dy}{dx}$$

$$\cancel{y_\xi (x-\xi)\Big|^{\xi = x}} + \int_0^x y_\xi \, d\xi = -\frac{E\Theta}{\rho g}\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{P}{\rho g}\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$y_x = -\frac{E\Theta}{\rho g}\frac{d^4y}{dx^4}$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{E\Theta}{\rho g}}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{E\Theta}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\rho g}{E\Theta} y = 0$$

$$y'''' + \beta^2 y'' + \alpha^4 y = 0$$

jeżeli β duże w porównaniu z α:

$y = A \cos \beta x$

$$l = 2\pi\sqrt{\frac{E\Theta}{P}}$$

w rzeczywistości różnorodne wpływy

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\alpha^4 y$$

$$y = \sum C e^{\pm \alpha x} \frac{\cos}{\sin} \alpha x$$

$$l = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{\rho g}{E\Theta}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{12\rho g}{h^3 E}}$$

$$= 2\pi\sqrt[4]{\frac{h^3 E}{12\rho g}}$$

$$\Theta = \frac{h^3}{12}$$

$\rho = 3$

$g = 10^3$

$h = 10^6$

$E = 5 \cdot 10^{11}$

$$l = 2\pi\sqrt[4]{\frac{12 \cdot 3 \cdot 10^3}{10^{18} \cdot 5 \cdot 10^{11}}} = 2\pi\sqrt[4]{\frac{3 \cdot 6 \cdot 10^4}{5 \cdot 10^{29}}}$$

$$= 2\pi\sqrt[4]{10^{+25}} = \cancel{5 \cdot 10^6} \ldots$$

$$= 10^7 = 100 \text{ km!}$$

$P = F\alpha = 2 \cdot 10^{15}$

$F \neq 2 \cdot 10^9$

γ^4 $\quad$ $\frac{P}{E\Theta}\gamma^2$ $\quad$ $\frac{\rho g}{E\Theta}$

10^{-25} $\quad$ 10^{-13} 10^{-12} $\quad$ 10^{-25}

$$\frac{2 \cdot 10^{15}}{\frac{5 \cdot 10^{11}}{12} \cdot 10^{18}}$$

Knickfestigkeit eines Stabes: $2\int_0^{a/2} x^2\,dx\,dy \quad 2\frac{a^3}{3.8}b$

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2} \qquad \Theta = \frac{a^3 b}{12}$$

$$\frac{P_E}{ab} = \frac{\pi^2 a^2}{12 l^2} E$$ muss immer kleiner sein als Druckfestigkeit (falls Stützung und sonst homog. Körper entsteht

$$\frac{\pi^2 a^2}{12 l^2} E \leqq F$$

$$l \geqq a\sqrt{\frac{E}{F}}$$

$\frac{E}{F}$ Blei = 900

Eisen = 300

Silber = 250

$$\frac{l}{a} > \sqrt{\frac{E}{F}}$$

wo-jede [illegible] $l < 150$ km [illegible]

$$l > 15a$$

$$l < \frac{\pi a}{\sqrt{12}}\sqrt{\frac{E}{p}}$$

Cylinder Röhre.

$$\left(\frac{a}{R}\right)^3 = \frac{3N}{E} \qquad N = \text{Normaldruck}$$

$$= ag\rho$$

$$a^2 = \frac{3g\rho}{E}R^3 \qquad R = 6.10^8\ \text{cm}$$

$$E = 5.10^3.10^8$$

$$a = R\sqrt{\frac{3\rho g R}{E}} \qquad \sqrt{\frac{3.2.10^3.6.10^8}{5.10^{11}}} = \sqrt{\frac{36}{5}}$$

$a \neq R!$

$$\rho g h R^2\pi = S\, 2R\pi h$$

$$S = \rho g \frac{R}{2\pi} = \frac{3.10^3.6.10^8}{6} = 3.10^{11} \;\ldots\; F = 10^9!$$

$$\rho g x = F$$

$$x = \frac{10^9}{3.10^3} = 3.10^5 = ~~300\ \text{km}~~ = 3\ \text{km}$$

$\frac{E\theta}{R} + Py = 0$ $+ \frac{d\varphi}{ds^2} = -\alpha^2 \sin\varphi$

φ_0 = kąt wychylenia w punkcie ~~dolnym~~ przegięcia

~~$E\theta$~~ $\alpha^2 = \frac{P}{E\theta}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \alpha^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0)$

$= 2\alpha^2\left[\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right]$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}} = 2\alpha\, ds = \frac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \dots}}$$

~~$2\alpha s + \text{const}$~~ $\sin\frac{\varphi_0}{2} \cdot \alpha s$ ~~[illegible]~~ $= \int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin\varphi}}$ $k = \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}$

$$y = \int \frac{dy}{ds} ds = \int \sin\varphi\, ds = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{+\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}$$

w przybliżonej teorii:
$y = a \sin\alpha x$
$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a\alpha$
$a = \frac{1}{\alpha}\, tg\,\varphi_0$

Amplituda największa: $a =$ ~~$\sqrt{2}\cos\varphi_0$~~ $\frac{\sqrt{2}}{\alpha}\sqrt{1 - \cos\varphi_0} = \frac{2}{\alpha}\sin\frac{\varphi_0}{2}$

$$x = \int \cos\varphi\, ds = \frac{1}{2\alpha}\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

$\sin\frac{\varphi}{2} = z \sin\frac{\varphi_0}{2}$

$\cos\frac{\varphi}{2}\frac{d\varphi}{2} = dz \cdot \sin\frac{\varphi_0}{2}$

$d\varphi = \frac{2\,dz \sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1 - \left(z \sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2}}$

$$\alpha l = \frac{1}{\dots}\int_{\frac{\varphi_0}{2}}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}}} = -\int_0^{\frac{\varphi_0}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\varphi}}$$

$\sin\varphi = y \sin\frac{\varphi_0}{2}$

$\cos\varphi\, d\varphi = dy \sin\frac{\varphi_0}{2}$

$$= \frac{1}{\alpha}\int \frac{\left[1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi\right]\ d(\sin\varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin\varphi}\ \cos\varphi}$$

$$\alpha s = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2} z^2}\sqrt{1 - z^2}}$$

$$\alpha l = -\int_{0}^{1} \frac{dy\ \sin\frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{1 - y^2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}\sqrt{1 - y^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\int \frac{1 - 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

dla małych $\sin\frac{\varphi_0}{2}$:

$$\alpha l = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{3}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi\right]d\varphi = 2\left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\frac{\pi}{4}\right] = \pi - \frac{3\pi}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} = \pi\left[1 - \frac{3}{4}\frac{a^2\alpha^2}{4}\right]$$

$$= \pi\left[1 - \frac{3a^2\alpha^2}{16}\right]$$

To nie nie ma do rzeczy
oczywiście że l musi się zmniejszać
nal gdy P rośnie i a rośnie!
trzeba obliczyć $\int ds = l$!

zupełnie to samo co za pomocą ~~pierwszego~~ drugiego przybliżenia

---

Dokładne równanie dla

$$\frac{E\theta}{R} + Py + \rho g\int_0^x y(x-\xi)\,d\xi = 0$$

~~α~~ $l\sqrt{\frac{P}{E\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\varphi}}$

$E\theta \frac{d\varphi}{ds} + Py + \dots$

$a = 2\sqrt{\frac{E\theta}{P}}\sin\frac{\varphi_0}{2}$

$$E\theta\frac{d^2\varphi}{ds^2} + P\sin\varphi + \rho g\int_0^x y\, d\xi \cdot \cos\varphi = 0 \quad \Big|\ \sin\varphi\ \frac{d\varphi}{ds}$$

$$\alpha l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha a}{2}\right)^2\sin^2\varphi}}$$

$$E\theta\frac{d^3\varphi}{ds^3} + P\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds} + \rho g\, y\cos^2\varphi - \rho g\int_0^x y\,d\xi\,\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad \Big|\ \cos\varphi$$

$$E\theta\left[\frac{d^3\varphi}{ds^3}\cos\varphi + \frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{d\varphi}{ds}\sin\varphi\right] + P\frac{d\varphi}{ds} + \rho g\cos^3\varphi = 0$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \frac{a^2\alpha^2}{8}\sin^2\varphi\right]d\varphi$$

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} + \frac{a^2\alpha^2}{8}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{a^2\alpha^2}{16}\right]$$

$\sin\frac{\varphi_0}{2} = 2\sqrt{\frac{2\alpha l}{\pi} - 1}$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{\sin^2\frac{\varphi_0}{2}}{4}\right]$$

$\sin\frac{\varphi_0}{2} = \frac{a\alpha}{2}$

$$\therefore\ \alpha l = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{a^2\alpha^2}{16}\right]!$$

To samo co bezpośrednio z poprzednim.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \alpha^2 \frac{dy}{dx} + \frac{\rho g h}{E\theta}\left(x - \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y + \frac{\rho g h}{E\theta}\,\frac{x^2 - lx}{2} = c \quad (= M_0)$$

Zwykłe [illegible] $l = \pi\sqrt{\frac{E\theta}{P}}$

$$P = E\theta\frac{\pi^2}{\lambda^2} + \rho g\frac{\lambda^2}{\pi^2}$$

$$\lambda = \pi\sqrt[4]{\frac{E\theta}{\rho g}} \qquad \rho g = E\theta\frac{\pi^4}{\lambda^4}$$

$$P = 2E\theta\frac{\pi^2}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \pi\sqrt{\frac{2E\theta}{P}} \ !$$

$$\lambda = \pi\sqrt[4]{\frac{E\theta}{\rho g}}$$

$$= 3\sqrt[4]{\frac{5.10^{11}.10^{18}}{3.10^3.12}}$$

$$= 3\sqrt[4]{\frac{5}{36}\frac{10^{29}}{10^4}} = 3\sqrt[4]{14}.10^6$$

$$= 60\ km$$

$$\theta = \frac{a^3}{12} \qquad \lambda = \pi\sqrt{\frac{Ea^3}{6P}}$$

$$\lambda > \pi\sqrt{\frac{E}{F}}\sqrt{\frac{a^2}{6}}$$

$\frac{E}{F}$ Elsen $= 300$

$$\lambda > \pi\underbrace{\sqrt{\frac{300}{6}}}_{22\,a}\sqrt{a^2}$$

$a = 10\ km = 10^6$

$\lambda >$ ~~$22.10^9 = 220000\ k$~~

$> 220\ km$

$P = d\,p$

$$p > \underbrace{2\sqrt{\frac{E\theta\rho g}{a^2}}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{Ea\rho g}{12}} = 2\sqrt{\frac{5.10^{11}.10^6.3.10^3}{12}}$$

$$= 2\sqrt{2.5\ 10^{10}} = 3.10^{10}$$

$$\frac{p}{E} = \frac{3.10^{10}}{5.10^{11}} \ ! \quad = \frac{3}{50}$$

inaczej wyjdzie nie ma [illegible]

Wrogą dozwoloną granicę $p = 2\sqrt{\frac{Ea\rho g}{12}}$

~~$$\lambda = \pi\sqrt{\frac{2Ea^2\sqrt{12}}{12.2\sqrt{Ea\rho g}}} = \pi\sqrt{\frac{\sqrt{Ea^5}}{12\ \rho g}}$$~~

$$P = 2\sqrt{E\theta\rho g} \qquad \lambda = \pi\sqrt{\frac{2E\theta}{2\sqrt{E\theta\rho g}}} = \pi\sqrt[4]{\frac{E\theta}{\rho g}}$$

? wszę czyby odwrotnie wynikało że $P = 2\sqrt{E\theta\rho g}$?

W każdym razie $\frac{2\sqrt{E\theta\rho g}}{h} < \frac{P}{h^2} <$ Druckfestigkeit

$$2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{E\,h^3}{(1-\mu^2)}\rho g}$$

~~$$2\sqrt{\frac{2}{3}800}$$~~

$$\frac{8}{3(1-\mu^2)}\underbrace{\frac{E}{F}}_{100}\frac{h\rho g}{F} = 1$$

$$F = 8.10^3.10^2 g \qquad \rho g = 2\ g$$

$$h = \frac{F}{\rho g}\cdot\frac{1}{300} = \frac{4.10^5}{300} = \frac{4}{3}10^3$$

$= 10\ m!$

$$\lambda \neq 2\pi\sqrt[4]{\frac{2}{3}\frac{E\,h^3}{(1-\mu^2)\rho g}}$$

$$\frac{2}{3}\frac{8.10^7\,h^3}{(1-\mu^2)\,\rho}$$

$$\lambda = 6\sqrt[4]{\frac{8.10^7.10^9}{3}} = 6.10^4\sqrt[4]{\frac{8}{3}}$$

$\neq 600\,m.$

$$\frac{P}{h} = \frac{2}{3}\frac{E\,h^3}{(1-\mu^2)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi}{6.10^4}\right)^2 + \rho g\left(\frac{6.10^4}{\pi}\right)^2}{h}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{10^9.8.10^7}{4.10^8} + 2.10^3.4.10^8$$

$\| F = 8.10^8$

$$= \frac{4}{3}.10^{11} + 8.10^{11} = 9.10^8$$

$\lambda = 6.3.10^4$

$$10^9.\sqrt[4]{\frac{8.10^7.2.8}{3}\ 10^8} = \frac{4\pi}{\lambda}$$

$$\frac{5.3}{4} = 10^6$$

$$\sqrt[4]{12}\ 10^6$$

$$\lambda = 6.3.10^5\ 1.2$$

~~Ady dokładniejsze równanie~~

$$E\Theta \frac{d^4y}{dx^4} + P_0 \frac{d^2y}{dx^2} + \rho g y = 0$$

$$\begin{cases} y = a \sin \frac{\pi x}{l} \\ P_0 = E\Theta \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{\pi^2} \end{cases} \qquad E\Theta \frac{\pi^4}{l^4} - P_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g = 0$$

Niech jednak

$$P = P_0 + p$$

$$E\Theta\left[\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{3a^3}{8}\left(\frac{\pi}{l}\right)^6\left(\sin\frac{\pi x}{l} + 9\sin\frac{3\pi x}{l}\right)\right] + P\frac{d^2y}{dx^2} + \rho g y = 0$$

} y będzie nieco inne $y = y_0 + y_1$

określimy się z warunków $y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ dla $x = l - \lambda$

czy dla p dodatniego wyniknie a, λ rzeczywiste dodatnie?

Odejmując pierwotne równanie:

$$E\Theta\left[-\frac{3a^3}{8}\left(\frac{\pi}{l}\right)^6\left(\sin\frac{\pi x}{l} + 9\sin\frac{3\pi x}{l}\right)\right] + p\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Warunki $y=0$ $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ dla $x=l$ dają:

$$\sin\frac{\pi(l-\lambda)}{l} = \sin\pi\left(1-\frac{\lambda}{l}\right) = \sin\frac{\pi\lambda}{l} = \sin\alpha\lambda$$

$$\sin\frac{3\pi(l-\lambda)}{l} = \sin 3\alpha\lambda$$

$$\cos\frac{\pi(l-\lambda)}{\lambda} = -\cos\alpha\lambda$$

$$\begin{cases} a\sin\alpha\lambda + \frac{3a^3\alpha^5 E\Theta}{16\left[2\alpha^2 E\Theta - P\right]}(l-\lambda)\cos\alpha\lambda + \frac{27}{8}\frac{a^3\alpha^6 E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g}\sin 3\alpha\lambda = 0 \\ (y_0'') - 3a^3\alpha^4 E\Theta\left[\frac{\sin\alpha\lambda}{8(2\alpha^2 E\Theta - P)} + \frac{9\alpha^2 \sin 3\alpha\lambda}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g}\right] = 0 \end{cases}$$

równania na <u>a i λ</u> jako funkcje p

$x = l:$

$$a \sin\alpha l + \frac{3a^3\alpha^5 E\Theta}{16[2\alpha^2 E\Theta - P]} l \cos\alpha l + \frac{27}{8} \frac{a^3\alpha^6 E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g} \sin 3\alpha l = 0$$

$$\frac{3a^3\alpha^6 E\Theta}{8[2\alpha^2 E\Theta - P]} \sin\alpha l + \frac{27 \quad a^3\alpha^8 E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g} \sin 3\alpha l = 0$$

$$a^3\alpha^6\left[\frac{\sin\alpha l}{8[2\alpha^2 E\Theta - P]} + \frac{9 \sin 3\alpha l}{8[10\alpha^2 E\Theta - P]}\right] = 0$$

$$\sin\alpha l + \frac{3a^2\alpha^5 E\Theta}{16[2\alpha^2 E\Theta - P]} l \cos\alpha l + \frac{27}{8 \cdot 8} \frac{a^2\alpha^4 E\Theta}{[10\alpha^2 E\Theta - P]} \sin 3\alpha l = 0$$

$\sin\alpha l = \delta \quad \cos\alpha l = -1 + \frac{\delta^2}{2} \quad \sin 3\alpha l = 3\delta$

$$\delta + \frac{3a^2\alpha^5 E\Theta\, l}{16[2\alpha^2 E\Theta - P]}\left[-1 + \frac{\delta^2}{2}\right] + \frac{27}{64} \frac{a^2\alpha^4 E\Theta}{10\alpha^2 E\Theta - P} 3\delta = 0$$

$\delta = \pi - \alpha l$

$$\delta = \frac{3a^2\alpha^5 E\Theta\, l}{16[2\alpha^2 E\Theta - P]}$$

$\alpha = \frac{\pi - \delta}{l}$

$$a^2 = \frac{16}{3\alpha^5} \frac{[2\alpha^2 E\Theta - P]}{E\Theta}\left[\frac{\pi}{l} - \alpha\right]$$

$E\Theta\alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g = 0$

prostý drátkoduk vzine

$$= \frac{16}{3\alpha^7} \frac{\alpha^4 E\Theta - \rho g}{E\Theta}\left[\frac{\pi}{l} - \alpha\right]$$

$$= \frac{16}{3\alpha^7}\left[\alpha^4 - \frac{\rho g}{E\Theta}\right]\left[\frac{\pi}{l} - \alpha\right]$$

$\frac{\rho g}{E\Theta} < \frac{\pi^4}{l^4}$

$$E\Theta \cdot \frac{\pi^4 - 4\pi^3\delta}{l^4} - P \cdot \frac{\pi^2 - 2\pi\delta}{l^2} + \rho g = 0$$

$$\frac{\delta}{l} = \frac{E\Theta \frac{\pi^4}{l^4} - P\frac{\pi^2}{l^2} + \rho g}{4E\Theta\frac{\pi^3}{l^3} - 2P\frac{\pi}{l}}$$

$\sin 3\alpha l \,(1-\delta)$

$= \sin 3\pi l - \delta 3\pi l \cos 3\pi l$

$\cos 3\pi l\,(1-\delta) = \cos 3\pi l + \delta 3\pi l \sin 3\pi l$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$y = a \sin \alpha x$

$$= \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{2} a^3\alpha^4 \sin\alpha x \cos^2\alpha x$$

$$P\frac{d^2y}{dx^2} + \rho g y = -E\Theta\left[\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{3}{2}a^3\alpha^4 \frac{d^2}{dx^2}\sin\alpha x \cos^2\alpha x\right]$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{3a^3\alpha^4}{8}\left[\sin\alpha x + \sin 3\alpha x\right]$$

$$= -\frac{3a^3\alpha^6}{8}\left[\sin\alpha x + 9\sin 3\alpha x\right]$$

Jeśli α spełnia: $y = a \sin\alpha x$, $P\frac{d^2y}{dx^2} + \rho g y + E\Theta\frac{d^4y}{dx^4} = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{l}$

to dokładniej równanie będzie spełnione, przez $y = y_0 + a^2\alpha^2 y_1$

czy wtedy $P = P_0 + p$ da dodatnią wartość a?

gdy $E\Theta\alpha^4 - P_0\alpha^2 + \rho g = 0$

$x \cos\alpha x$

$\cos\alpha x - x\alpha \sin\alpha x$

$-2\alpha \sin\alpha x - x\alpha^2\cos\alpha x$

$-3\alpha^2\cos\alpha x + x\alpha^3 \sin\alpha x$

$4\alpha^3 \sin\alpha x + x\alpha^4\cos\alpha x$

$$k\left\{P(-2\alpha\sin\alpha x - x\alpha^2\cos\alpha x) + \rho g x\cos\alpha x + E\Theta\left[4\alpha^3\sin\alpha x + x\alpha^4\cos\alpha x\right]\right\} = \frac{3a^3\alpha^6 \cdot E\Theta}{8}\sin\alpha x$$

$$= k\left\{\sin\alpha x\left[-2\alpha P + 4\alpha^3 E\Theta\right] + x\cos\alpha x\left[E\Theta\alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g\right]\right\} = \frac{3a^3\alpha^6 E\Theta}{8}\sin\alpha x$$

$= 0$

$$k = \frac{3a^3\alpha^6 E\Theta}{8}\,\frac{1}{4\alpha^3 E\Theta - 2\alpha P}$$

$$y = y_0 + \frac{3a^3\alpha^5 E\Theta}{16\left[2\alpha^2 E\Theta - P\right]} x\cos\alpha x + m \sin 3\alpha x$$

$$m\left\{-9\alpha^2 P + \rho g + 81 . E\Theta\alpha^4\right\} = \frac{27}{8}a^3\alpha^6 E\Theta$$

$$y = y_0 + \frac{3a^3\alpha^5 E\Theta}{16\left[2\alpha^2 E\Theta - P\right]} x\cos\alpha x + \frac{27}{8}\,\frac{a^3\alpha^6 E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g}\sin 3\alpha x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \alpha^2 a \sin\alpha x - (\alpha^2 x\cos\alpha x + 2\alpha\sin\alpha x) - \frac{27 . 9}{8}\,\frac{a^3\alpha^8 E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g}\sin 3\alpha x$$

$$= -\alpha^2 y_0 - \frac{3a^3\alpha^6 E\Theta}{8(2\alpha^2 E\Theta - P)}\sin\alpha x - \frac{27\,a^3\alpha^8 E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9\alpha^2 P + \rho g}\sin 3\alpha x$$

$a[\sin\mu - \delta\mu\cos\mu] + \frac{3a^3}{16}\ldots\ldots = 0$

$\mp\ \underline{\sin\mu - \delta\mu\cos\mu}$

$$\frac{\sin\mu - \delta\mu\cos\mu}{A} + \frac{\sin 3\mu - 3\delta\mu\cos 3\mu}{B} = 0$$

$\delta\mu =$

$$\int_0^{l(1-\delta)}\left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] dx = l$$

$\delta = f.(a, P, l)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2 y + k \sin\alpha x \qquad ?$$

$$\frac{d}{dx}(x \sin(\alpha x+\delta)) = \sin\alpha x + x\alpha\cos\alpha x$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \qquad = 2\alpha\cos(\alpha x+\delta) - x\alpha \sin(\alpha x+\delta)$$

$$y = ax\sin(\alpha x+\delta) + b\sin(\alpha x+\varepsilon)$$

$$2\alpha a\cos(\alpha x+\delta) - x a\alpha^2 \sin(\alpha x+\delta) - b\alpha^2\sin(\alpha x+\varepsilon) = -\alpha^2 a x \sin(\alpha x+\delta) - \alpha^2 b \sin(\alpha x+\varepsilon) + k\sin\alpha x$$

$$2\alpha a\cos(\alpha x+\delta) = k\sin\alpha x$$

$$(\cos\alpha x\cos\delta - \sin\alpha x\sin\delta) \qquad \cos\delta = 0 \qquad \delta = \frac{\pi}{2}$$

$$k = -2\alpha a$$

$$y = -\frac{k}{2\alpha} x \cos\alpha x + b\sin(\alpha x+\varepsilon)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2 y - \frac{3\alpha^4 a^3}{8}(\sin\alpha x + \sin 3\alpha x) \qquad \text{warunek } \alpha^2 a^2 \text{ mały}$$

$$y = +\frac{3\alpha^3 a^3 x}{16}\cos\alpha x + y_0 + n\sin(3\alpha x + \varphi)$$

$$-9n\alpha^2\sin(3\alpha x+\varphi) = -n\alpha^2\sin(3\alpha x+\varphi) - \frac{3\alpha^4 a^3}{8}\sin 3\alpha x$$

$$n = \frac{3\alpha^2 a^3}{64}$$

$$y = y_0 + \frac{3\alpha^3 a^3 x}{16}\cos\alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{64}\sin 3\alpha x$$

$y_0 = a\sin\alpha x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\alpha^2\sin\alpha x - \frac{27\alpha^4 a^3}{64}\sin 3\alpha x - \frac{3\alpha^4 a^3}{8}\sin\alpha x - \frac{3\alpha^5 a^3 x}{16}\cos\alpha x$$

$$= -a\alpha^2\sin\alpha x - \frac{3a^3\alpha^4}{8}\sin\alpha x - \frac{27a^3\alpha^4}{64}\sin 3\alpha x - \frac{3a^3\alpha^5 x}{16}\cos\alpha x$$

$$= -\alpha^2$$

$y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$$A_1 + B_1 = 0$$

$$\sout{(\gamma^2-\beta^2)(A_1+B_1)} + 2\gamma\beta(A_2 - B_2) = 0$$

$$\underline{A_2 = B_2}$$

$$y = A_1(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x})\cos\beta x + A_2(e^{\gamma x} + e^{-\gamma x})\sin\beta x$$

$$\frac{dy}{dx} = A_1\left[\gamma(e^{\gamma x}+e^{-\gamma x})\cos\beta x - \beta(e^{\gamma x}-e^{-\gamma x})\sin\beta x\right] + A_2\left[\gamma(e^{\gamma x}-e^{-\gamma x})\sin\beta x + \beta(e^{\gamma x}+e^{-\gamma x})\cos\beta x\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1\left\{\gamma^2(e^{\gamma x}-e^{-\gamma x})\cos\beta x - 2\gamma\beta(e^{\gamma x}+e^{-\gamma x})\sin\beta x - \beta^2(e^{\gamma x}-e^{-\gamma x})\cos\beta x\right\}$$
$$+ A_2\left\{\gamma^2(e^{\gamma x}+e^{-\gamma x})\sin\beta x + 2\gamma\beta(e^{\gamma x}-e^{-\gamma x})\cos\beta x - \beta^2(e^{\gamma x}+e^{-\gamma x})\sin\beta x\right\}$$

$x = l$:

$y = 0$

$\frac{dy}{dx} = 0$

$$A_1 = -A_2\,\frac{e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}}\,\mathrm{tg}\,\beta l$$

$$-\left[e^{\gamma l}+e^{-\gamma l}\right]\sin\beta l\left\{(\gamma^2-\beta^2)(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l})\cos\beta l - 2\gamma\beta(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l})\sin\beta l\right\}$$
$$+\left[e^{\gamma l}-e^{-\gamma l}\right]\cos\beta l\left\{(\gamma^2-\beta^2)(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l})\sin\beta l + 2\gamma\beta(e^{\gamma l}-e^{-\gamma l})\cos\beta l\right\} = 0$$

$$(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l})^2\sin^2\beta l + (e^{\gamma l}-e^{-\gamma l})^2\cos^2\beta l = 0$$

więc niemożliwe!

~~$(e^{\gamma l}+e^{-\gamma l})\sin\beta l = \ldots$~~

Ewyktu elastica, drugie przybliżenie:

$$P y = -E\Theta \frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$y = a \sin \alpha x$$

$$P y = -E\Theta \frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{3}{2}a^2\alpha^2 \cos^2\alpha x\right) = -E\Theta\frac{d^2y}{dx^2}\left[1-\frac{3}{2}\alpha^2(a^2-y^2)\right]$$

$$\frac{P y}{E\Theta\left[1-\frac{3}{2}\alpha^2(a^2-y^2)\right]} = -\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P y}{E\Theta}\left[1+\frac{3}{2}\alpha^2(a^2-y^2)\right]$$

~~$-E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = Py\left[1+\frac{3}{2}\alpha^2(a^2-y^2)\right]$~~

$$= \frac{P y}{E\Theta}\left(1+\frac{3\alpha^2a^2}{2}\right) - \frac{3}{2}\frac{\alpha^2 P}{E\Theta}y^3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P\left(1+\frac{3\alpha^2a^2}{2}\right)}{E\Theta}y + \frac{3\alpha^2}{2}\frac{P}{E\Theta}a^3\sin^3\alpha x$$

$$\sin^3\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^3 = -\frac{e^{3i\varphi}-3e^{i\varphi}+3e^{-i\varphi}-e^{-3i\varphi}}{8i}$$

$$= -\frac{\sin 3\varphi - 3\sin\varphi}{4}$$

~~$\sin 3\varphi$ ...~~

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}y + \frac{P}{E\Theta}\left\{-\frac{3\alpha^2a^2}{2}a\sin\alpha x + \frac{3}{4}\frac{3\alpha^2}{2}a^3\sin\alpha x - \frac{3\alpha^2}{8}a^3\sin 3\alpha x\right\}$$

$$-\frac{3}{8}\alpha^2a^3\sin\alpha x$$

$$\frac{E\Theta}{P}\frac{d^2y}{dx^2} = -y - \frac{3\alpha^2a^3}{8}(\sin\alpha x + \sin 3\alpha x)$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{E\Theta}$$

$$y = y_0 + m\sin\alpha x + n\sin 3\alpha x$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\left[-m\alpha^2\sin\alpha x - 9\alpha^2 n\sin 3\alpha x\right] = -m\sin\alpha x - n\sin 3\alpha x - \frac{3\alpha^2a^3}{8}(\sin\alpha x + \sin 3\alpha x)$$

Zwykła elastica drugie przybliżenie:

$$~~y = a\sin\alpha x + \frac{3\alpha^3a^3x}{16}\cos\alpha x + \frac{3\alpha^2a^3}{64}\sin 3\alpha x~~ \qquad ~~\alpha = \frac{\pi}{l} = \sqrt{\frac{P_0}{E\Theta}}~~$$

$$E\Theta\,\frac{d^2y_0}{dx^2} + P_0\,y_0 = 0$$

$$E\Theta\left[\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{8}\alpha^4a^3(\sin\alpha x + \sin 3\alpha x)\right] + (P_0 + p)\,y = 0 \qquad y = y_0 + y_1$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_0}{E\Theta}}$$

$$E\Theta\left[\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{3}{8}\alpha^4a^3(\sin\alpha x + \sin 3\alpha x)\right] + P_0\,y_1 + p\,y_0 = 0$$

$$\downarrow$$

$$p\,a\sin\alpha x$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \alpha^2y_1 + \left(\frac{3}{8}\alpha^4a^3 + \frac{pa}{E\Theta}\right)\sin\alpha x + \frac{3}{8}\alpha^4a^3\sin 3\alpha x = 0$$

$$~~-\frac{3}{64}\,9\alpha^4 + \frac{3\alpha^4}{64} + \frac{3}{8}~~$$

$$y_1 = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{3}{8}\alpha^4a^3 + \frac{pa}{E\Theta}\right)x\cos\alpha x + \frac{3}{64}\alpha^2a^3\sin 3\alpha x$$

$$y = a\sin\alpha x + \left[\frac{3\alpha^3a^3}{16} + \frac{pa}{2\alpha E\Theta}\right]x\cos\alpha x + \frac{3}{64}\alpha^2a^3\sin 3\alpha x$$

Jeśli jednak $y = a \sin \frac{h\pi}{l} x$ $\left(\frac{h\pi}{l} = \alpha\right)$

$$U+V-W = (a+b_h)^2\left[E\Theta\alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g\right] + \sum_{k=1}^{h-1} b_k^2\left[E\Theta\frac{k^4\pi^4}{l^4} - P\frac{k^2\pi^2}{l^2} + \rho g\right] + \sum_{h+1}^{\infty}\cdots$$

$$P = E\Theta\alpha^2 + \frac{\rho g}{\alpha^2}$$

$$E\Theta\frac{k^4\pi^4}{l^4} - \frac{k^2\pi^2}{l^2}\left[E\Theta\frac{h^2\pi^2}{l^2} + \rho g\frac{l^2}{h^2\pi^2}\right] + \rho g =$$

$$E\Theta(k^4 - k^2h^2)\frac{\pi^4}{l^4} + \rho g\left[1 - \frac{k^2}{h^2}\right] > 0$$ dla jakiegokolwiek k

$$\left[E\Theta h^2\frac{\pi^4}{l^4} - \frac{\rho g}{h^2}\right](k^2 - h^2) > 0$$

ma być:

dla $k > h$: $E\Theta\frac{\pi^4}{l^4}k^2 > \frac{\rho g}{h^2}$ ∴ $(kh)^2 > \frac{\rho g}{E\Theta\frac{\pi^4}{l^4}}$

dla $k < h$: $E\Theta\frac{\pi^4}{l^4}k^2 < \frac{\rho g}{h^2}$ ∴ $(kh)^2 < \frac{\rho g}{E\Theta\frac{\pi^4}{l^4}}$

$$\frac{l}{h} = \lambda$$

to będzie spełnione jeśli $\frac{\rho g}{E\Theta\frac{\pi^4}{l^4}} = h^4$ (najbliższemu)

$$\frac{l^4}{\pi^4} = \frac{E\Theta}{\rho g}h^4$$

$h^2 \pm h = M$

$h = \mp\frac{1}{2} + \sqrt{M + \frac{1}{4}}$ dolna górna granica

więc h jest to liczba całkowita która zawartą być musi w tych granicach

ściślej biorąc: $k = h \pm \chi$

$$(h\pm\chi)^2 h^2 \gtrless M^2$$

$$h+\chi > \frac{M}{h}$$

$$h-\chi < \frac{M}{h}$$

$\chi = 1, 2, 3\ldots$

$$h+1 > \frac{M}{h}$$

$$h-1 < \frac{M}{h}$$

$$h^2 - h < M < h^2 + h$$

$$h^2(h-1)^2 < M^2 < h^2(h+1)^2$$

$$M^2 = \frac{\rho g\, l^4}{E\Theta\,\pi^4}$$

$$\lambda = \pi\sqrt[4]{\frac{E\Theta}{\rho g}}$$

więc to samo co zwykle wartość dla l

Wtedy ~~$P = E\Theta\frac{h^2\pi^2}{l^2}\left[1 + \frac{\rho g\, l^4}{E\Theta h^4\pi^4}\right]$~~

$$P = \sqrt{E\Theta\rho g}\left[\alpha^2\sqrt{\frac{E\Theta}{\rho g}} + \frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\rho g}{E\Theta}}\right]$$ ma być $\geq 2\sqrt{E\Theta\rho g}$

~~$1 + \frac{1}{h} < 1 + \frac{1}{h}$~~

$$\frac{l^2}{\pi^2} \neq \frac{1}{\frac{P}{2E\Theta} + \sqrt{\left(\frac{P}{2E\Theta}\right)^2 - \frac{\rho g}{E\Theta}}}$$

$$\frac{\pi}{l}\left[1 - \frac{3}{16}\frac{a^2 \frac{\pi^2}{l^2}}{2 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\rho g \frac{E\Theta}{P^2}}}}\right] = \sqrt{\ldots}$$

$$= \frac{\pi}{l}\left[1 - \frac{3}{32}\frac{a^2 \frac{\pi^2}{l^2}}{1 - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - 4\rho g \frac{E\Theta}{P^2}}}}\right]$$

dla $\rho = 0$ staje się identyczne z poprzednim

i znowu byłoby dzięki $P > 2\sqrt{\rho g E\Theta}$; z rosnącym P maleje a

jeżeli jednak drugi pierwiastek:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{2E\Theta} - \sqrt{\left(\frac{P^2}{2E\Theta}\right) - \frac{\rho g}{E\Theta}}}$$

to będzie $\frac{P}{E\Theta}\frac{l^2}{\pi^2} = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\rho g \frac{E\Theta}{P^2}}}$ zatem większe od 2 zatem mianownik ujemny

$$1 - \frac{l}{\pi}\sqrt{\ldots} = \frac{\sqrt{\frac{P_0}{2E\Theta} \pm \sqrt{\ }} - \sqrt{\frac{P}{2E\Theta} \pm \sqrt{\ }}}{\sqrt{\frac{P_0}{2E} \pm \sqrt{\ldots}}}$$

$$1 - \frac{3}{16}\frac{a^2 \frac{\pi^2}{l^2}}{2 - \frac{P}{E\Theta}\frac{l^2}{\pi^2}} = \frac{l}{\pi}\sqrt{\ }$$

$$a^2 = \frac{16}{3}\frac{l^2}{\pi^2}\left(2 - \frac{P}{E\Theta}\frac{l^2}{\pi^2}\right)\left[1 - \frac{l}{\pi}\sqrt{\ldots}\right]$$

$$= \frac{32}{3}\frac{1}{\frac{P}{2E\Theta} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2E\Theta}\right)^2 - \frac{\rho g}{E\Theta}}}\left[1 - \frac{1}{1 \pm \sqrt{1 - 4\rho g \frac{E\Theta}{P^2}}}\right]\left[1 - \frac{l}{\pi}\sqrt{\ldots}\right]$$

~~[illegible]~~

inaczej dwie możliwości: znak $+\sqrt{\ }$; $l < l_0$; a^2 maleje z wzrastającym P wskutek

znak $-\sqrt{\ }$; $l > l_0$ $\left[\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{2E\Theta}}\sqrt{1 + \sqrt{1 - 4\rho g \frac{E\Theta}{P^2}}} - 1\right]$ a^2 maleje z wzrastającym P!

~~$\frac{d}{dx}\left[x - \sqrt{x^2 - a^2}\right] = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$~~

~~będzie > 0 dzięki $\frac{x^2}{x^2 - a^2} < 1$~~

~~niemożliwe!~~

Drugie przybliżenie dla wyboczenia elastica

$x = l$:

$$a \sin \alpha l + \frac{3\alpha^3 a^3 l}{16} \cos \alpha l + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha l = 0$$

$$\alpha^2 a^3 \left[+ \sin \alpha l + \sin 3\alpha l \right] = 0$$

musi być samo przez się spełnione z tytułu równania równowagi jeśli $y = 0$

$$\alpha l = \frac{\pi}{2} + \delta$$

$$\sin \alpha l = \cos \delta = 1 - \frac{\delta^2}{2}$$

$$\cos \alpha l = \sin \delta = \delta$$

$$\sin 3\alpha l = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3\delta\right) = -\cos 3\delta = -1 + \frac{9\delta^2}{2}$$

$$1 - \frac{\delta^2}{2} - 1 + \frac{9\delta^2}{2} = 0$$

$$a\left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{3\alpha^3 a^3 l}{16} \delta + \frac{3\alpha^2 a^3}{64}\left(-1 + \frac{9\delta^3}{2}\right) = 0$$

$$\sin \alpha l = \sin \delta = \delta$$

$$\cos \alpha l = -\cos \delta = -1 + \frac{\delta^2}{2}$$

$$\sin 3\alpha l = \sin(3\pi - 3\delta) = . 3\delta$$

$$a\delta + \frac{3\alpha^3 a^3 l}{16}\left(-1 + \frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} 3\delta = 0$$

$$\delta = + \frac{3\alpha^3 a^2 l}{16}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}} = \frac{\pi}{l} - \frac{3\alpha^3 a^2}{16}$$

$$P = E\Theta\left[\frac{\pi}{l} - \frac{3\alpha^2}{16}\right]$$

$$a^2 = \frac{16}{3\alpha^3}\left[\frac{\pi}{l} - \alpha\right]$$

α prawie równe $\frac{\pi}{l}$

zatem $a^2 \neq \frac{16}{3}\frac{l^2}{\pi^2}\left(1 - \frac{\alpha l}{\pi}\right)$

zatem gdy P rośnie a musiałoby maleć! więc niestałość równowagi aby była równowaga

$$\delta = \frac{3}{16}\frac{a^2}{l^2}(\pi - \delta)^3 = \frac{3}{16}\frac{a^2}{l^2}(\pi^3 - 3\pi^2\delta)$$

$$\delta \neq \frac{3}{16}\frac{a^2\pi^3}{l^2} = \pi - l\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

Potential energy of bending ~~$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2}$~~ $R\alpha = l$

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha} \frac{E\Theta}{R}\, d\alpha = \int_{\alpha=0}^{\alpha} \frac{E\Theta}{l}\, \alpha\, d\alpha = \frac{\alpha^2}{2}\frac{E\Theta}{l} = \frac{E\Theta\, l}{2R^2}$$

Pot. energy of bent element ds: $\frac{E\Theta\, ds}{2R^2} = \frac{E\Theta}{2} ds \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$

Pot. energy of elastica: | External work:

$$U = \frac{E\Theta}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \;\Big\|\; W = P\int_0^l \left(1 - \frac{dx}{ds}\right) ds = P\int_0^l \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right] dx = \frac{P}{2}\int_0^l \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

~~[illegible]~~ $(U - W)$ must be minimal $\qquad \underline{\alpha = \frac{\pi}{l}}$

$$y = \underbrace{a \sin\alpha x}_{\text{elastica}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}}_{\text{virtual variation}}$$

$$\int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 k\varphi \cdot d\varphi = \frac{l}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2k\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{l}{2\pi}\left(\pi - \frac{\sin 2k\varphi}{2k}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{l}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = a\alpha\cos\alpha x + \sum_{k=1}^{\infty} b\frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\alpha^2\sin\alpha x - \sum b\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$U = \frac{E\Theta}{2}\int_0^l dx \left\{a^2\alpha^4\sin^2\alpha x + \sum b^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \sin^2\frac{k\pi x}{l} + 2a\alpha^2 b_1 \frac{\pi}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} + \cancel{\sum \dots \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}}\right\}$$

$$= \frac{E\Theta l}{4}\Big[\underbrace{a^2\alpha^4 + \text{~~[illegible]~~} + 2a\alpha^2 b_1\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + b_1^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4}_{=(a+b_1)^2\alpha^4} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 b_k^2\Big]$$

$$W = \frac{P}{2}\int_0^l \Big[\text{~~[illegible]~~} \; (a+b_1)^2\alpha^2\cos^2\alpha x + \sum_{k=2} b_k^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\cos^2\frac{k\pi x}{l} + 2\sum_{k=2}^{\infty} a\alpha\frac{b_k k\pi}{l}\cos\alpha x \cdot \cos\frac{k\pi x}{l}$$
$$+ 2\sum_{m,n=2}^{\infty} b_m b_n \frac{mn\pi^2}{l^2}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big]$$

$$= \frac{Pl}{4}\left[(a+b_1)^2\alpha^2 + \sum_2^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 b_k^2\right]$$

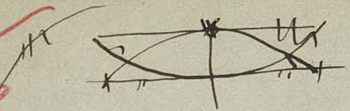
$$E\Theta\left[(a+b_1)^2\alpha^4 + \sum\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 b_k^2\right] - P\left[(a+b_1)^2\alpha^2 + \sum\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 b_k^2\right]$$

$$= (a+b_1)^2 \alpha^2 \left(E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} - P\right) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k^2 k^2\left(E\Theta\frac{k^2\pi^2}{l^2} - P\right)$$

ażeby to było dla jakiegokolwiek b ~~[illegible]~~ większe od normalnego, potrzeba żeby wszystkie $\left(E\Theta\frac{k^2\pi^2}{l^2} - P\right)$ były dodatnie dla $k = 2, 3 \dots$

A jeśli $E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} \geq P$ to zawsze można znaleźć taki b_1, dodatnie lub ujemne, które jeszcze zmniejszy tę wartość, zatem [illegible] minimum tylko jeśli $E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} = P$

Początek wybocz. w ~~[illegible]~~ innej



$y = a \cos \alpha x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\frac{3}{2} a^3 \alpha^4 \sin^2 \alpha x \cos \alpha x}_{} + \alpha^2 y = 0$$

$$= \frac{3}{8} a^3 \alpha^4 \left[\cos \alpha x - \cos 3\alpha x\right]$$

$$y = -\frac{3}{16} a^3 \alpha^3 \, x \sin \alpha x - \frac{3}{64} a^3 \alpha^2 \cos 3\alpha x + a \cos \alpha x$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ tam gdzie $y = 0$ [bo w tem punkcie równ. różn. niedokładne!]

$$a \sin \delta = \frac{3}{16} a^3 \alpha^2 \left[-\frac{\sin 3\delta}{4} + \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \cos \delta\right]$$

~~$$\left[1 - \frac{\delta^2}{6}\right] = \frac{3}{16} a^2 \alpha^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\left(1 - \frac{\delta^2}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(3 - \frac{27}{6}\delta^2\right)\right]$$~~

~~$$1 = \frac{3}{16} a^2 \alpha^2 \left[\frac{\pi}{2} - \delta - \frac{3}{4}\right]$$~~

$$\alpha = \frac{\pi}{l} + \varepsilon$$

$$\frac{3}{16} a^2 \frac{\pi^2}{l^2} = -\varepsilon \frac{l}{\pi}$$

$$\varepsilon = -\frac{3}{16} a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^3$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l}\left[1 - \frac{3}{16} a^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

~~wzgl. P tem mniejsze im mniejsze a~~

$x \sin$

$\sin + x \cos$

$2 \cos - x \sin$

$-3 \sin - x \cos$

$-4 \cos + x \sin$

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{E\Theta}$$

$$\delta = \frac{3}{16} a^2 \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

~~$$\alpha l = \frac{\pi}{\pi}\left[1 - \frac{3}{16} a^2 \alpha^2\right]$$~~

~~$$\frac{3}{16} a^2 \alpha^2 = 1 - \frac{\alpha l}{\pi}$$~~

~~$$\frac{3}{16} a^2 \frac{P}{E\Theta} = 1 - \frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$~~

~~$$l = \pi \sqrt{\frac{E\Theta}{P}}\left[1 - \frac{3}{16} a^2 \frac{P}{E\Theta}\right]$$~~

$$\frac{\lambda}{l} = a^2\alpha^2 \left\{ \frac{3}{16} \frac{E\theta\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4}} \left[1 + \frac{p}{\alpha^2\left(E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4}\right)}\right] - \frac{81}{8} \frac{E\theta \frac{\lambda}{l}}{72 E\theta - 8\frac{\rho g}{\alpha^4}} \left[1 + \frac{9p}{\alpha^2\left(72 E\theta - 8\frac{\rho g}{\alpha^4}\right)}\right] \right\}$$

$p = 0$

$\lambda = 0$ $\qquad \lambda = \lambda_1 p + \lambda_2 p^2$

$a = ?$ $\qquad a^2 = a_1^2 p + a_2^2 p^2$

W naszym wypadku jeszcze trzeci składnik: pot. en. ciężkości

$$V = \int_0^l \rho g \frac{y^2}{2}\, dx$$

$U + V - W$ musi być minimalne

$$V = \frac{\rho g}{2}\int_0^l \left[\sin^2\alpha x\,(a+b_1)^2 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k^2 \sin^2\frac{k\pi x}{l} + ~~2\sum b_m b_n \sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx~~\right]dx$$

$$= \frac{\rho g\, l}{4}\left[(a+b_1)^2 + \sum_2^{\infty} b_k^2\right]$$

$U+V-W =$

$$(a+b_1)^2\left[E\Theta\,\alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g\right] + \sum b_k^2\left[E\Theta\, k^4\alpha^4 - P\alpha^2k^2 + \rho g\right]$$

minimum tylko jeśli $E\Theta\,\alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g = 0$

$$\text{I). } P = \frac{E\Theta\frac{\pi^4}{l^4} + \rho g}{\frac{\pi^2}{l^2}} = E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} + \rho g\frac{l^2}{\pi^2}$$

ale równocześnie wszystkie $E\Theta\, k^4\alpha^4 - P\alpha^2k^2 + \rho g > 0$

więc: $P < 4E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} + \rho g\frac{l^2}{4\pi^2}$

czy to jest jednak koniecznie wyższa granica od poprzedniej?

~~tylko w razie jeśli $E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} > \rho g\frac{l^2}{\pi^2}$~~

pod jakim warunkiem jest $ma + \frac{b}{m} > a + b$?

$$(m-1)a > b\left(1-\frac{1}{m}\right) = b\,\frac{m-1}{m}$$

$$a > \frac{b}{m} \qquad m = 2,\ 2\ (2)\ (3)\ \ldots$$

$$E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} > \frac{\rho g}{4}\frac{l^2}{\pi^2}$$

$$\frac{l^4}{\pi^4} < \frac{4E\Theta}{\rho g} \qquad \text{II).}$$

~~$P > 2\sqrt{E\Theta\,\rho g}$~~

~~$\sqrt{ab}$~~

~~$\rho g\frac{l^2}{\pi^2}$ — $E\Theta\frac{\pi^2}{l^2}$~~

jeśli zaś $a \geq b$

to zawsze $2\sqrt{ab} < a+b$

więc pozostają tylko warunki (I), (II)

zatem zawsze jest spełniony warunek $P > 2\sqrt{E\Theta\rho g}$

~~ttt~~ $x + \frac{1}{x} \geqq 2$

$x^2+1 \geqq 2x$

$(x-1)^2 \geqq 0$ ~~tylko wtedy dla x = 1~~ zawsze spełnione dla dowolnego x

więc pozostaje tylko warunek:

$$h^2(h-1)^2 < \frac{\rho g}{E\Theta}\frac{l^4}{\pi^4} < h^2(h+1)^2$$

oraz równanie $P = E\Theta h^2 \frac{\pi^2}{l^2} + \rho g \frac{l^2}{h^2\pi^2}$

---

wtedy mamy $y = a \sin \frac{h\pi x}{l}$

$$y = y_0 + x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \frac{x^3}{3!}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 + \frac{x^4}{4!}\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 + \dots$$

$$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_0 = -\frac{P}{E\Theta}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 - \frac{\rho g}{E\Theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\mu\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 - \nu\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$$

$$D^7 = -\mu D^5 - \nu D^3 = \mu^2 D^3 + \mu\nu D - \nu D^3 = (\mu^2-\nu)D^3 + \mu\nu D$$

$$D^9 = -\mu D^7 - \nu D^5 = (-\mu^3 + 2\mu\nu)D^3 - (\mu^2\nu - \nu^2)D$$

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \varphi(x) + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \psi(x)$$

$\varphi'(x)_0 = 1$ $\quad \varphi'''(x)_0 = 0$

$\psi'(x)_0 = 0$ $\quad \psi'''(x)_0 = 1$

$$\frac{dy}{dx} = a\alpha \cos\alpha x + \frac{3\alpha^3 a^3}{16}\left(\cos\alpha x - \alpha x \sin\alpha x\right) + \frac{9\alpha^3 a^3}{64}\cos 3\alpha x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a\alpha + \frac{3}{4}\alpha^3 a^3$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_l = a\alpha\left(-1+\frac{\delta^2}{2}\right) + \frac{3\alpha^3 a^3}{16}\left(-1+\frac{\delta^2}{2} - \alpha l \delta\right) + \frac{9\alpha^3 a^3}{64}\left(1 - \frac{9\delta^2}{2}\right)$$

asymetrya! ale [illegible]!

Wydaje się ~~błąd~~ polega na tem, że [illegible] powinno być:

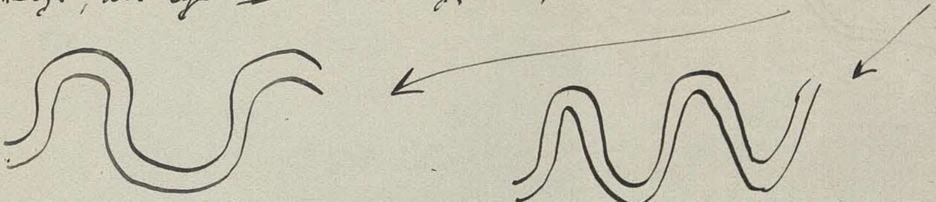
$$y = a\sin(\alpha x + \varepsilon) + \frac{3\alpha^3 a^3 x}{16}\cos(\alpha x + \varepsilon) + \frac{3\alpha^2 a^3}{64}\sin(3\alpha x + 3\varepsilon)$$

więc dla $x=0$:

$$y = a\sin\varepsilon + \frac{3\alpha^2 a^3}{64}\sin 3\varepsilon = 0$$

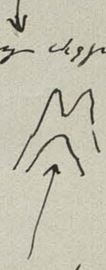
wynika $\varepsilon = 0$

Najsłabsze punkty wierzchołki; tylko wtedy tam najlepszy yielding point i najszybsza relaxacya; dla tego ~~[illegible]~~ z relaxacyą nie powstanie kształt elastica lecz:



w granicznym przypadku wszystkiej siły łamanie:

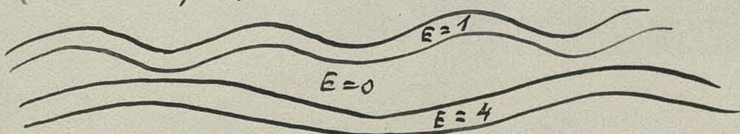
w dalszym ciągu? albo zupełne łamanie



Stanowiny „fingerförmige Ausläufer"?

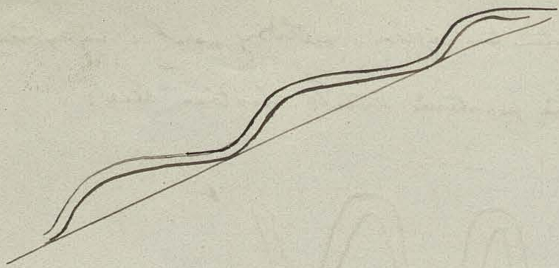
W razie nierównego E w różnych warstwach?
(albo nierównego [illegible])

Np.



W dalszym ciągu:

Grubsze skorupy k tem większe sam wytrzyma siły!



$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0 \qquad \Bigg\| \qquad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0$$

$$\rho g + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0 \qquad \Bigg\| \qquad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial (Y_y + \rho g y)}{\partial y} = 0$$

$$X_x = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \; ; \; Y_y = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y \;\; [+ f(x)] \; ; \; X_y = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \sout{2\mu e_{xx} + \lambda \Delta} = (2\mu + \lambda) e_{xx} + \lambda e_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f(x) = \sout{2\mu e_{yy} + \lambda \Delta} = (2\mu + \lambda) e_{yy} + \lambda e_{xx}$$

$$-\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \mu e_{xy}$$

$$e_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad e_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad e_{yy} = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}$$

$$+2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} =$$

$$\sout{\lambda \left[\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2}\right]}$$

$$\sout{(2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mu\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + \lambda \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0}$$

$$\sout{\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2}}$$

$$\sout{(2\mu+\lambda)\left(\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2}\right) + \lambda\left(\frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial x^2}\right) - 2\mu \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y}}$$

$$= \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(e_{xx} + e_{yy})$$

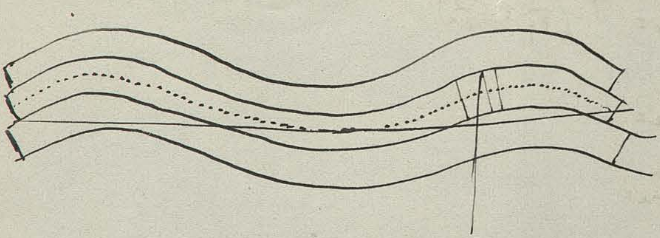
$$e_{xx}\left[(2\mu+\lambda)^2 - \lambda^2\right] = (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f x\right)$$

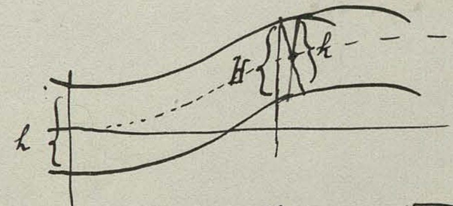
$$e_{yy}\left[\qquad\qquad\right] = (2\mu+\lambda)\left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \rho g y + f(x)\right] - \lambda \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$$

$$(2\mu+\lambda)\left[\frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right] - 2\lambda \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \left[(2\mu+\lambda)^2 - \lambda^2\right]\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

$$4\mu^2 + 4\mu\lambda$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0}$$





Jeśli każdą belkę z osobna rozpatrujemy: grubość nie zmniejszona, ale rozmiar w kierunku pionowym zmniejszony

W pierwszem przybliżeniu: ~~H~~ $H = \frac{h}{\cos\varphi} = h\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = h\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$

zatem powstaną tam Y_y, gdzie $\frac{dy}{dx} \gtrless 0$, dążące do zmniejszenia grubości tw owych miejscach

Równocześnie [jeśli się przyjmuje że $\xi = 0$ dla linji środkowej] linia środkowa zostaje wydłużona w stosunku $ds = \frac{d\xi}{\cos\varphi} = d\xi\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$, co wywołuje skurczenie w kierunku poprzecznym $h' = h\left(1-\frac{\mu}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$

W całości zatem jeśliby nie miały powstać żadne siły Y_y, X_x, to potrzebaby aby tam gdzie $\left(\frac{dy}{dx}\right) \gtrless 0$ belka w kierunku X się wydłużyła o $\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1-\mu}{2\mu}\left(\frac{\partial y}{dx}\right)^2$?

$\frac{1}{2}(1-\mu)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \mu\frac{d\xi}{dx}$

Jeśli jednak warstwy miękkie po środku, zniknie ta trudność.

Wspólna dylatacja lub kompresja dawałaby do superponowania

Raczej w miejscach gdzie $\frac{dy}{dx} = 0$ nastąpiłoby skurczenie w kierunku Y

Ślizgające przesunięcia w ~~[illegible]~~ poszczególnych warstwach $\Delta s \neq h\frac{dy}{dx}$

Co określa ~~[illegible]~~ warunek przejścia ze stanu jednorodnie zgniecionego ~~[illegible]~~ w stan sfałdowany?

(W każdym razie sfałdowanie przy zgnieceniu jest łatwiejsze później?)

$X_x = 2T\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + \Sigma\ \theta\right]$ $\quad X_y = T\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$

$Y_y =$ $\quad Y_z =$

$Z_z =$ $\quad Z_x =$

$\sout{Z_z}\ X_x = 2\mu\, e_{xx} + \lambda\Delta$ $\quad = \mu\, e_{yx}$

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu\left(\frac{\partial e_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial e_{yz}}{\partial y} + 2\frac{\partial e_{zz}}{\partial z}\right) + \lambda\frac{\partial\Delta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial e_{zz}}{\partial z} + (\mu+\lambda)\frac{\partial\Delta}{\partial z} = 0$$

Bent (cylindrical) plate p 130 terminal couple: $M = -\frac{2}{3}\frac{Eh^3}{1-\sigma^2}\frac{1}{R}$

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{P}{2E\Theta}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\Theta}{P^2}}\right]}$$

W razie $P > 2\sqrt{E\Theta\rho g}$:

$$y = A\sin(\alpha x + \varepsilon) + B\sin(\beta x + \delta)$$

$x = 0$: $\left\{\begin{matrix} y = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} = 0\end{matrix}\right.$ $\Big|$ $\Big\}$ $x = l$

$$\begin{cases} A\sin\varepsilon + B\sin\delta = 0 \\ A\alpha^2\sin\varepsilon + B\beta^2\sin\delta = 0 \end{cases}$$

$$A\sin(\alpha l + \varepsilon) + B\sin(\beta l + \delta) = 0$$
$$A\alpha^2\sin(\alpha l + \varepsilon) + B\beta^2\sin(\beta l + \delta) = 0$$

N. p. $B = 0$, $\varepsilon = 0$ albo $A = 0$, $\delta = 0$

możliwe tylko jeśli: $\sin(\alpha l) = 0$

więc: $\alpha l = k\pi$

więc stąd zwykła sinusoida

Bez ρg byłoby podobnie, tylko że: $\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$, więc dla bardzo dużych P jeden z pierwiastków stałby się (z uwagą) identycznym (oczywiście!)

To znaczy że tylko pewne wartości P są dopuszczalne przy danem l.

P nie mogłoby wzrastać w sposób ciągły.

Oprócz jeśli α jest wielokrotnością β! W takim razie superpozycja

$$\alpha = n\beta$$

$$y = B\sin\beta + A\sin n\beta$$

Próba: czy symetrya?

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_l$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = a\alpha + \frac{3a^3\alpha^5 E\theta}{16\left[2\alpha^2 E\theta - P\right]} + \frac{81}{8}\frac{a^3\alpha^7 E\theta}{81\alpha^4 E\theta - 9\alpha^2 P + \rho g} = a\alpha + \frac{3}{16}a^3\alpha^5 E\theta\left[\frac{40\alpha^2 E\theta - 4P + 54\alpha^2 E\theta - 27P}{(2\alpha^2 E\theta - P)(10\alpha^2 E\theta - P)}\right]$$

$$= \frac{81}{64}\frac{a^3\alpha^5 E\theta}{\left[10\alpha^2 E\theta - P\right]}$$

$\sin 2\alpha x \sin\alpha x = \cos\alpha x - \cos 3\alpha x$

$-\cos(\alpha x + 2\alpha x)$

$\cos\alpha x - \cos^3\alpha x + \sin^2 + 2\sin^2\cos$

$$\frac{d}{dx}(x^2\cos\alpha x) = 2x\cos\alpha x - \alpha x^2\sin\alpha x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\qquad) = 2\cos\alpha x - 4\alpha x\sin\alpha x - \alpha^2x^2\cos\alpha x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2 y + k\sin\alpha x$$

$$y = mx^2\sin\alpha x + nx\cos\alpha x + p$$

$$m\left[2\cos\alpha x - 4\alpha x\sin\alpha x - \alpha^2x^2\cos\alpha x\right]$$

$$+ n\left[-2\alpha\sin\alpha x - \alpha\alpha^2\cos\alpha x\right]$$

$$\frac{d}{dx}(x^2\sin\alpha x) = 2x\sin\alpha x + \alpha x^2\cos\alpha x$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\qquad) = 2\sin\alpha x + 4\alpha x\cos\alpha x - \alpha^2x^2\sin\alpha x$$

$$m\left[2\sin\alpha x + 4\alpha x\cos\alpha x - \alpha^2x^2\sin\alpha x\right]$$

$$+ n\left[-2\alpha\sin\alpha x - x\alpha^2\cos\alpha x\right]$$

$$= -\alpha^2\left\{mx^2\sin\alpha x + nx\cos\alpha x\right\} + k\sin\alpha x$$

$m = 0$ $\quad k = -2\alpha n$ $\quad \frac{d^2y}{d\xi^2} = -\alpha^2 y + k\cos\alpha\xi$

$x = \frac{l}{2} - \xi$

$$y = \frac{k}{2\alpha}\,\xi\sin\alpha\xi + b\sin(\alpha\xi + \varepsilon)$$

$\alpha\xi = \frac{\pi}{2} - \alpha x$

$$= \frac{k}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{2\alpha} - x\right)\cos\alpha x + b\sin\alpha x$$

$$y = a\sin(\alpha x + \varepsilon) - \frac{3\alpha^3a^3}{16}\left(x - \frac{\pi}{2\alpha}\right)\cos\alpha x + \frac{3\alpha^2a^3}{64}\sin 3\alpha x$$

$\alpha^2 y = -\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{d\varphi}{ds}$

$\alpha^2\sin\varphi = -\frac{d^2\varphi}{ds^2}$

$y = \int \ldots$ $\quad \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{ds}{dx} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{1}{\cos\varphi}$

$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{d\varphi}{ds}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$

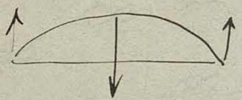
$E\Theta\left[\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\varphi + \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{R}\right)\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right] + P\frac{1}{R} + \rho g\cos\varphi = 0$

$E\Theta\left[\cos\varphi\frac{d^3\varphi}{ds^3} + \sin\varphi\frac{d^2\varphi}{ds^2}\frac{d\varphi}{ds}\right] + P\frac{d\varphi}{ds} + \rho g\cos^3\varphi = 0$

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\left[1 + \tan^2\varphi\right]^{3/2}}{R} = \frac{1}{R\cos^3\varphi}$$

Sposób poprawki równania różn. jest odpowiedni w całym otoczeniu z wyjątkiem ~~punktów~~ punktu $y=0$

tam poprawione równ. różn. traci swoją ważność i trzeba wrócić do formy ścisłej
(jaka jest?)



Z powodu symetryi w każdym razie tam gdzie $y=0$ musi być $M=0$ $=\int \rho \xi$
a zatem $\frac{d^2y}{dx^2}=0$

Ale czy istotnie jest symetrya?

W razie wyboczenia elastica: $\alpha^2 a^2 = \frac{16}{3}\left(1-\frac{\alpha l}{k\pi}\right)$

$$l = \frac{k\pi}{\alpha} - \frac{3\alpha a^2 \pi}{16}$$

$$y = a \sin \alpha x + \frac{3\alpha^3 a^3}{16} x \cos \alpha x + \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin 3\alpha x \qquad \text{biorąc } x = \frac{l}{2} + \xi$$

$$\alpha x = \frac{k\pi}{2} - \frac{3\alpha^2 a^2}{32}\pi + \xi\alpha$$

$$y = a \cos\left(\frac{3\alpha^2 a^2\pi}{32} - \xi\alpha\right) + \frac{3\alpha^3 a^3}{16}\left[\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{3\alpha a^2\pi}{32} + \xi\right] \sin\left(\frac{3\alpha^2 a^2\pi}{32} - \alpha\xi\right) - \frac{3\alpha^2 a^3}{64} \sin\left(\frac{9\alpha^2 a^2\pi}{32} - 3\alpha\xi\right)$$

$$= a\left(\cos\alpha\xi + \frac{3\alpha^2 a^2\pi}{32}\sin\alpha\xi\right) - \frac{3\alpha^2 a^3}{32}(\pi + 2\alpha\xi)\sin\alpha\xi + \frac{9}{64}\alpha^2 a^3 \sin 3\alpha\xi$$

$$= a\cos\alpha\xi + \frac{9}{64}\alpha^2 a^3\left[\sin 3\alpha\xi - \frac{3}{4}\xi\sin\alpha\xi\right]$$

asymetrya!

Także gdyby inaczej dobrać l, nigdy usunie się $3\alpha\xi$ -- ξ z $\alpha\xi$ nie może się zniszczyć!

Więc problemat:

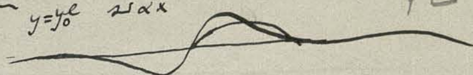
$$\frac{d^2y}{dx^2} + \underbrace{\frac{3}{2} a^3\alpha^4 \sin\alpha x \cos^2\alpha x}_{= \frac{3a^3\alpha^4}{8}\left[\sin\alpha x + \sin 3\alpha x\right]} = -\alpha^2 y$$

./.

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{E\theta}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\rho g}{E\theta}y = 0$$

$\int y\,dx = 0$ jeżeli [illegible] nie się podnosi

zatem $y = y_0 e^{-\alpha x} \sin \alpha x$



$$y'''' + m^2 y'' + n^4 y = 0$$

$$y = A e^{\alpha x}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-\frac{m^2}{2} \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} - n^4}} = \pm\sqrt{\frac{m^2}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4n^4}{m^4}}\right)} = \pm\sqrt{\frac{P}{2E\theta}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\theta}{P^2}}\right]}$$

w razie jeżeli $P^2 < 4\rho g E\theta$?

w razie jeżeli $P^2 > 4\rho g E\theta$

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{P}{2E\theta}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\theta}{P^2}}\right]}$$

więc tylko sinusoidy
dla małych θ:
$y = y_0 \sin x\sqrt{\frac{P}{E\theta}}$

$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{E\theta}{P}}$
zwykła [illegible]

$P_{max} = 2 \cdot 10^{15}$

$\rho = 3$

$g = 10^3$

$\theta = \frac{h^3}{12} = \frac{10^{18}}{12}$

$E = 5 \cdot 10^{11}$

$4\rho g E\theta = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{11} \cdot 10^{18}}{12}$

$= 5 \cdot 10^{32}$

a zatem $P^2 \ll 4\rho g E\theta$

przy założeniu $h = 10^6$!

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{P}{2E\theta}\left[-1 \pm i\sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2} - 1}\right]}$$

$$\sqrt{x+iy} = \sqrt{r}\cdot e^{\frac{i\theta}{2}} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= \sqrt[4]{x^2+y^2}\left(\cos\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}{2} + i\sin \ldots\right)$$

$$\sqrt{-x+iy} = \sqrt{r}\sqrt{-\cos\theta + i\sin\theta} = \sqrt{r}\sqrt{e^{i(\pi-\theta)}} = \sqrt{r}\left(\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sqrt{-x-iy} = \sqrt{r}\sqrt{-\cos\theta - i\sin\theta} = \sqrt{r}\sqrt{e^{i(\pi+\theta)}} = \sqrt{r}\left(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2} - 1}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\rho g E\theta}{P^2}}} = \sqrt{\frac{P^2}{4\rho g E\theta}}$$

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{P}{2E\theta}}\cdot\sqrt[4]{\frac{4\rho g E\theta}{P^2}}\left[\pm\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \pm\sqrt{\frac{P}{2E\theta}}\sqrt[4]{\frac{4\rho g E\theta}{P^2}}\left[\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{P^2}{4\rho g E\theta}}}{2}} + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{P^2}{4\rho g E\theta}}}{2}}\right]$$

$\lambda \approx 2\pi\sqrt[4]{\frac{E\theta}{\rho g}}$ r.t.

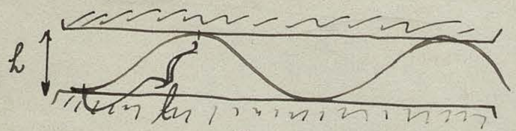
$= 6\sqrt[4]{\frac{2 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^3} \cdot 5 \cdot 10^6}$ … km

Dla niezbyt dużych P przybliżenie:

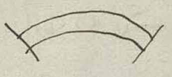
$$\alpha = \pm\sqrt[4]{\frac{\rho g}{2E\theta}}\left[\pm 1 + i\right] = \pm\sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}} \pm i\sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}}$$

$$\frac{y}{y_0} = e^{\pm x\sqrt[4]{\frac{\rho g}{E\theta}}}\sin\left(x\sqrt{\frac{\rho g}{E\theta}} + \varepsilon\right)$$

Zwykła elastica między ścianami stałemi



$$l = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha h}{4}\right)^2 \sin^2\varphi}} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{P}{E\theta}}$$



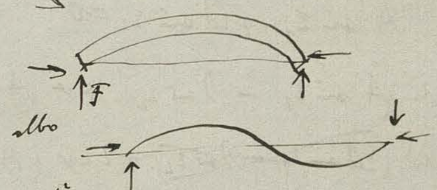
$$M = \frac{E\Theta}{R}$$

to samo nie byłoby w równowadze mechanicznej! trzeba koniecznie jeszcze dodać zewnętrzne siły przy końcach równoważące, które spowodują dodatkowy moment

$$Py + \rho g \int_{\xi=0} (x-\xi)\, d\xi = \frac{P\Theta}{R} \mp -E\Theta \frac{d^2y}{dx^2}$$

$-Fx$

$$P\frac{dy}{dx} + \rho g \int_0^x y\, d\xi + (-F) = \mp E\Theta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)$$



$$P\frac{d^2y}{dx^2} + \rho g\, y = \mp E\Theta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) \mp -E\Theta \frac{d^4y}{dx^4}$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{d^2y}{dx^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \dots\right]$$

$$y = A e^{\alpha x}$$

$$E\Theta \alpha^4 + P\alpha^2 + \rho g = 0 \qquad \alpha^4 + \frac{P}{E\Theta}\alpha^2 + \frac{\rho g}{E\Theta} = 0$$

$$\alpha = \pm\sqrt{-\frac{P}{2E\Theta} \pm \sqrt{\frac{P^2}{4E^2\Theta^2} - \frac{\rho g}{E\Theta}}} = \pm i\sqrt{\frac{P}{2E\Theta}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\rho g E\Theta}{P^2}}\right]}$$

$$= \pm i\sqrt{\frac{P}{2E\Theta}}\sqrt{1 \mp i\sqrt{\frac{4\rho g E\Theta}{P^2} - 1}}$$

$$= \pm(\mu + i\nu)$$

$$\sqrt{\alpha \pm i\beta} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} \pm i \sin\frac{\varphi}{2}\right) \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sqrt{R}\left(\cos\frac{\varphi}{2} \pm i \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{P}{2E\Theta}}\sqrt{\frac{4\rho g E\Theta}{P^2}} \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2\rho g}{P}} \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{4\rho g E\Theta}{P^2} - 1}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{2E\Theta}}\sqrt{\frac{4\rho g E\Theta}{P^2}} \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2\rho g}{P}} \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$\left.\begin{matrix}\cos\frac{\varphi}{2}\\ \sin\frac{\varphi}{2}\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{1 \pm \cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{X + \frac{4\rho g E\Theta}{P^2} - X}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \frac{P}{2\sqrt{\rho g E\Theta}}}{2}}$$

$$\alpha = \mu + i\nu$$

$$\left.\begin{aligned}\mu^2 - \nu^2 &= -\frac{P}{2D}\\ 2\mu\nu &= \pm\sqrt{\frac{\rho g}{D} - \frac{P^2}{4D^2}}\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}\mu^4 - 2\mu^2\nu^2 + \nu^4 &= \frac{P^2}{4D^2}\\ 4\mu^2\nu^2 &= \frac{\rho g}{D} - \frac{P^2}{4D^2}\\ \hline \mu^2 + \nu^2 &= \pm\sqrt{\frac{\rho g}{D}}\end{aligned}$$

$$\begin{matrix}\mu^2\\ \nu^2\end{matrix} = \frac{1}{2}\left[\frac{-P}{+2D} + \sqrt{\frac{\rho g}{D}}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \mu\left[Ae^{\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon_1) - Be^{-\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon_2)\right]$$
$$+\nu\left[Ae^{\mu x}\cos(\nu x+\varepsilon_1) + Be^{-\mu x}\cos(\nu x+\varepsilon_2)\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mu^2\left[Ae^{\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon_1) + Be^{-\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon_2)\right] - \nu^2\left[Ae^{\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon_1) + Be^{-\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon_2)\right]$$
$$+2\mu\nu\left[Ae^{\mu x}\cos(\nu x+\varepsilon_1) - Be^{-\mu x}\cos(\nu x+\varepsilon_2)\right]$$

$$A\sin\varepsilon_1 + B\sin\varepsilon_2 = 0$$

$$\mu(A\sin\varepsilon_1 - B\sin\varepsilon_2) + \nu(A\cos\varepsilon_1 + B\cos\varepsilon_2) = 0$$

$$\mu^2(~~A\sin\varepsilon_1 + B\sin\varepsilon_2~~) + 2\mu\nu(A\cos\varepsilon_1 - B\cos\varepsilon_2) - \nu^2(~~A\sin\varepsilon_1 + B\sin\varepsilon_2~~) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A\sin\varepsilon_1 &= -B\sin\varepsilon_2 \\ A\cos\varepsilon_1 &= B\cos\varepsilon_2 \end{aligned}\right\} \quad \mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = -\mathrm{tg}\,\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2$$

$$A^2 = B^2 \qquad \text{albo } \varepsilon_1 = \pi - \varepsilon_2$$

w pierwszym razie:

$A = B$

w drugim razie $A = -B$

~~teraz~~ ~~zatem~~ bo:

~~$2\mu\sin\varepsilon_1$~~

w każdym razie:

$$\mu A\sin\varepsilon_1 + \nu A\cos\varepsilon_1 = 0$$

$$\mu\sin\varepsilon_1 = -\nu\cos\varepsilon_1$$

~~tg~~ więc $\boxed{\mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = -\frac{\nu}{\mu}}$

$$y = A\left[e^{\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon) + e^{-\mu x}\sin(\nu x-\varepsilon)\right]$$

~~$\frac{dy}{dx} = \mu A\left[e^{\mu x}\sin(\nu x+\varepsilon) - e^{-\mu x}\sin(\nu x-\varepsilon)\right] + \nu A\left[e^{\mu x}\cos(\nu x+\varepsilon) + e^{-\mu x}\cos(\nu x-\varepsilon)\right]$~~

$l=0$: $e^{\mu l}\sin(\nu l+\varepsilon) + e^{-\mu l}\sin(\nu l-\varepsilon) = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2} =$ ~~$(\mu^2-\nu^2)\left[e^{\mu l}\sin(\nu l+\varepsilon) + e^{-\mu l}\sin(\nu l-\varepsilon)\right]$~~ $+ 2\mu\nu\left[e^{\mu l}\cos(\nu l+\varepsilon) - e^{-\mu l}\cos(\nu l-\varepsilon)\right] = 0$

$$e^{2\mu l} = -\frac{\sin(\nu l-\varepsilon)}{\sin(\nu l+\varepsilon)} = \frac{\cos(\nu l-\varepsilon)}{\cos(\nu l+\varepsilon)}$$

$$-\mathrm{tg}(\nu l-\varepsilon) = \mathrm{tg}(\nu l+\varepsilon)$$

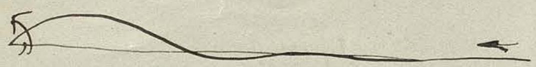
$$\nu l - \varepsilon = k\pi - \nu l - \varepsilon$$

$$2\nu l = k\pi$$

$$l = \frac{k\pi}{2\nu}$$

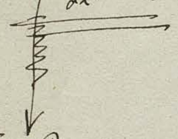
$$e^{2\mu l} = (-1)^k$$

incompatibel!



$x=0:\ y=0$ $\qquad x=\infty:\ y=0$ $\qquad A_1 = A_2 = 0$

$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = M_0$ $\qquad \frac{dy}{dx}=0$



~~$\frac{dy}{dx} = \gamma [\ldots B_1 \ldots]$~~

$B_1 = 0$

$y = B e^{-\gamma x} \sin\beta x$

$\frac{dy}{dx} = B e^{-\gamma x}\left[-\gamma \sin\beta x + \beta\cos\beta x\right]$

$\frac{d^2y}{dx^2} = B e^{-\gamma x}\left[\gamma^2 \sin\beta x - 2\gamma\beta\cos\beta x - \beta^2\sin\beta x\right]$

$M_0 = -E\Theta\, B\, 2\gamma\beta$

$x=\infty:\ y=0 \ \} \rightarrow y = \left[B_1 \cos\beta x + B_2 \sin\beta x\right] e^{-\gamma x}$

$x=0:\ y=y_0$

$\frac{dy}{dx}=0 \qquad -\gamma B_1 + \beta B_2 = 0$

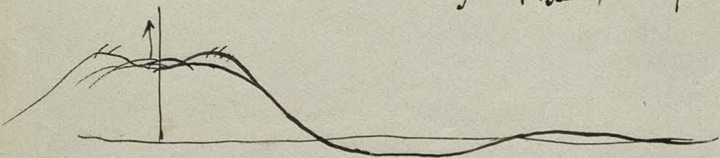
$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_0 = y_0\{-2\gamma\beta \frac{\gamma}{\beta} + \gamma^2 - \beta^2\}$

$= -y_0 (\gamma^2+\beta^2)$

$2\sqrt{\frac{pg}{E\Theta}}$

$y = [\cos\beta x + \frac{\gamma}{\beta}\sin\beta x]\, e^{-\gamma x}$ $\qquad$ zawsze $|\gamma| < |\beta|$

$B \sin\varepsilon = y_0$



$\lim P = 0$

$B(\mu^2\sin\varepsilon - 2\mu\nu\cos\varepsilon - \nu^2\sin\varepsilon) = \frac{M_0}{D}$

$= y_0\left[(\mu^2-\nu^2) - 2\mu\nu \operatorname{ctg}\varepsilon\right]$

$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{\mu^2-\nu^2}{2\mu\nu} - \frac{M_0}{D y_0}$

~~$P = 2\sqrt{E\Theta\, pg}$~~

$y = y_0 e^{-\mu x}\left[\cos\nu x + \sin\nu x\right]$

gdy $P > 2\sqrt{\ldots}$: $x=\infty$ $y=0$ niemożliwe

stąd ~~$y = A_1 \cos\alpha_1 x + A_2 \cos\alpha_2 x$~~

w razie rury walcowatej:

~~$y = A_1 e^{\beta\varphi} + B_1 e^{-\beta\varphi}$~~ niemożliwe dopóki $P < 2\sqrt{E\Theta\rho g}$

gdy $P > 2\sqrt{\cdots}$ wtedy:

$$y = A_1 \cos(\alpha_1 \varphi + \varepsilon_1) + B \cos(\beta\varphi + \delta)$$

$\varphi = 0 \quad \frac{dy}{d\varphi} = 0$ (minimax) $\qquad A\alpha \sin\varepsilon + B\beta \sin\delta = 0$

z powodu periodyczności:

$$A\cos(\alpha\varphi + \varepsilon + 2n\alpha\pi) + B\cos(\beta\varphi + \delta + 2n\beta\pi) = A\cos(\alpha\varphi + \varepsilon) + B\cos(\beta\varphi + \delta)$$

Niemożliwe!

Jedyny możliwy przypadek: $P = 2\sqrt{E\Theta\rho g}$

$$\left[\sqrt{E\Theta}.\alpha^2 + \sqrt{\rho g}\right]^2 = 0$$

$$\alpha^2 = \mp\sqrt{\frac{\rho g}{E\Theta}} \qquad y = A\cos(\beta\varphi + \varepsilon) + C e^{\beta\varphi} + D e^{-\beta\varphi} \qquad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho g}{E\Theta}}$$

$$\alpha = \pm(i)\sqrt[4]{\frac{\rho g}{E\Theta}}$$

$$A\underbrace{\left[\cos(\alpha\varphi + \varepsilon + 2n\alpha\pi) - \cos(\alpha\varphi + \varepsilon)\right]} + B\left[\;\text{---}\;\right] = 0$$

$$-2\sin(\alpha\varphi + \varepsilon + n\alpha\pi)\sin n\alpha\pi$$

$$y = e^{(\mu_1 + i\nu_1)x} \qquad e^{-(\mu_1 + i\nu_1)x}$$
$$e^{(\mu_2 + i\nu_2)x} \qquad e^{-(\mu_2 + i\nu_2)x}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\rho g}{P} - \sqrt{\frac{\rho g}{4E\Theta}}}$$

$$y = e^{\gamma x}\cos\beta x = \tfrac{1}{2}\left[e^{(\gamma + i\beta)x} + e^{(\gamma - i\beta)x}\right]$$

$$e^{\gamma x}\sin\beta x$$

$$y' = e^{\gamma x}(\gamma\cos\beta x - \beta\sin\beta x)$$

$$y'' = e^{\gamma x}(\gamma^2\cos\beta x - 2\gamma\beta\sin\beta x - \beta^2\cos\beta x)$$

$$y''' = e^{\gamma x}(\gamma^3\cos\beta x - 3\gamma^2\beta\sin\beta x - 3\gamma\beta^2\cos\beta x + \beta^3\sin\beta x)$$

$$\tfrac{1}{2}\left[(\gamma + i\beta)^4 e^{(\gamma + i\beta)x} + (\gamma - i\beta)^4 e^{(\gamma - i\beta)x}\right]$$

$$y'''' = e^{\gamma x}(\gamma^4\cos\beta x - 4\gamma^3\beta\sin\beta x - 6\gamma^2\beta^2\cos\beta x + 4\gamma\beta^3\sin\beta x + \beta^4\cos\beta x)$$

$$\left.\begin{aligned} E\Theta(\gamma^4 - 6\gamma^2\beta^2 + \beta^4) + P(\gamma^2 - \beta^2) + \rho g &= 0 \\ E\Theta[-4\gamma^3\beta + 4\gamma\beta^3] + P\,2\gamma\beta &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$2(\gamma^2 - \beta^2) + \frac{P}{E\Theta} = 0$$

$$\beta^2 = \gamma^2 + \frac{P}{2E\Theta}$$

$$E\Theta\left[\gamma^4 - 6\gamma^2\left(\gamma^2 + \frac{P}{2E\Theta}\right) + \gamma^4 + \frac{P}{E\Theta}\gamma^2 + \frac{P^2}{4E\Theta^2}\right] - \frac{P^2}{2E\Theta} + \rho g = 0$$

$$-4\gamma^4 - 2\frac{P\gamma^2}{E\Theta} - \frac{P^2}{4E^2\Theta^2} + \frac{\rho g}{E\Theta} = 0$$

$$\gamma^4 + \frac{P}{2E\Theta}\gamma^2 = \frac{\rho g}{4E\Theta} - \frac{P^2}{16E^2\Theta^2} \;\dots\rightarrow \left[\gamma^2 + \frac{P}{4E\Theta}\right]^2 = \frac{\rho g}{4E\Theta}$$

$$\gamma^2 + \frac{P}{4E\Theta} = +\sqrt{\frac{\rho g}{4E\Theta}}$$

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{-P}{4E\Theta} + \sqrt{\frac{\rho g}{4E\Theta}}}$$

$$\gamma^2 = -\frac{P}{4E\Theta}$$

(możliwe tylko jeśli:

$$\frac{P}{4E\Theta} < \sqrt{\frac{\rho g}{4E\Theta}}$$

$$\therefore \frac{P^2}{4E\Theta} < \rho g$$

$$P < 2\sqrt{E\Theta\rho g}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{P}{4E\Theta} + \sqrt{\frac{\rho g}{4E\Theta}}}$$

$$\boxed{y = \left[A_1 e^{\gamma_1 x} + B_1 e^{-\gamma_1 x}\right]\cos\beta_1 x + \left[A_2 e^{\gamma_1 x} + B_2 e^{-\gamma_1 x}\right]\sin\beta_1 x}$$

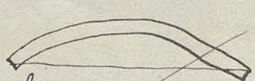
lim $P = 0$: $\quad \gamma = \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho g}{E\Theta \cdot 4}}$

Czy wyjście możliwe

$x = 0$ } $y = 0$?

$x = l$ } $\frac{dy}{dx} = 0$

$y = a \sin \alpha x$



$$\int_0^l a \sin\frac{\pi x}{l} \cdot (l - x)\, dx = \frac{a l^2}{\pi^2} \int_0^\pi \sin\varphi \cdot (\pi - \varphi)\, d\varphi$$

$$= \int_0^\pi \sin\varphi \cdot \varphi \, d\varphi$$

$$= -\varphi \cdot \cos\varphi = \pi$$

$$= \frac{a l^2}{\pi}$$

Z równania różniczk. wynika że tam gdzie oś przechodzi pierwszy raz przez $y = 0$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ musi być < 0

musi być asymetrya!

Wypracuj wkładkę F!

$x=0 \quad y=0 \quad A_1 + B_1 = 0$

$\frac{dy}{dx}=0 \quad \gamma_1(A_1 - B_1) + \beta_1(A_2+B_2) = 0 \Big\} \quad B_1 = -A_1$

$A_2 + B_2 = -\frac{2\gamma_1}{\beta_1} A_1$

~~$= \gamma_1 (A_1 e^{\gamma x} - B_1 e^{-\gamma x}) \cos\beta_1 x - \ldots + \beta_2 (A_2 + B_2) +$~~

~~$y = M e^{\gamma x} \sin(\beta x + \varepsilon) + N e^{-\gamma x} \sin(\beta x + \delta)$~~

$(A_2+B_2) e^{\gamma x} + B_2 (e^{-\gamma x} - e^{\gamma x})$

$y = A_1 [e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}] \cos\beta x$ ~~$- \frac{2\gamma}{\beta} A_1 e^{\gamma x} \sin\beta x + B_2 (e^{-\gamma x} - e^{\gamma x}) \sin\beta x$~~

$+ \left[A_2 e^{\gamma x} - \left(A_2 + \frac{2\gamma}{\beta} A_1\right) e^{-\gamma x}\right] \sin\beta x$

$y' = \gamma \left\{ A_1 [e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}] \cos\beta x + \left[A_2 e^{\gamma x} + \left[A_2 + \frac{2\gamma A_1}{\beta}\right] e^{-\gamma x}\right] \sin\beta x \right\}$

$+ \beta \left[-A_1 [e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}] \sin\beta x + \left[A_2 e^{\gamma x} - \left(A_2 + \frac{2\gamma A_1}{\beta}\right) e^{-\gamma x}\right] \cos\beta x \right\}$

$$\operatorname{tg}\beta l = - \frac{A_1 (e^{\gamma l} - e^{-\gamma l})}{A_2 e^{\gamma l} - \left(A_2 + \frac{2\gamma}{\beta} A_1\right) e^{-\gamma l}}$$

~~$\left\{ \gamma A_1 (e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}) + \beta \left[A_2 e^{\gamma l} - \left(A_2 + \frac{2\gamma A_1}{\beta}\right) e^{-\gamma l}\right] \right\} \left\{ A_2 e^{\gamma l} - \left(A_2 + \frac{2\gamma}{\beta} A_1\right) e^{-\gamma l} \right\} +$~~

$\left\{ \gamma \left[A_2 e^{\gamma l} + \left(A_2 + \frac{2\gamma A_1}{\beta}\right) e^{-\gamma l}\right] - \beta A_1 [e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}] \right\} [e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}] A_1 = 0$

$\left\{ (\gamma A_1 + \beta A_2) e^{\gamma l} - (\gamma A_1 - \beta A_2) e^{-\gamma l} \right\} \left\{ A_2 e^{\gamma l} - \left(A_2 + \frac{2\gamma}{\beta} A_1\right) e^{-\gamma l} \right\} +$

$e^{2\gamma l} \left[(\gamma A_1 + \beta A_2) A_2 - \gamma A_1 A_2 + \beta A_1^2 \right] + (\beta A_2 - \gamma A_1) A_2 - (\gamma A_1 + \beta A_2)\left(A_2 + \frac{2\gamma}{\beta} A_1\right) -$

$- A_1 \left(A_2 + \frac{2\gamma A_1}{\beta}\right) + \beta A_1^2 - \gamma A_1 A_2 + \beta A_1^2$

$+ e^{-2\gamma l} \left[(\gamma A_1 - \beta A_2)\left(A_2 + \frac{2\gamma}{\beta} A_1\right) + A_1 \gamma \left(A_2 + \frac{2\gamma A_1}{\beta}\right) - A_1^2 \beta \right] = 0$

$\gamma A_1 A_2 - \beta A_2^2 + \frac{2\gamma^2}{\beta} A_1^2 - 2\gamma A_1 A_2 + \gamma A_1 A_2 + \frac{2\gamma^2 A_1^2}{\beta} - A_1^2 \beta$

$y = a\cos\alpha x$ $\quad$ $\boxed{E\Theta\,\alpha^4 - P\alpha^2 + \rho g = 0}$ $\quad$ $\alpha^4 - \frac{P}{E\Theta}\alpha^2 + \frac{\rho g}{E\Theta} = 0$

$$E\Theta\left\{\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{3}{8}a^3\alpha^6\left[\cos\alpha x - 9\cos 3\alpha x\right]\right\} + P\frac{d^2y}{dx^2} + \rho g y = 0$$

$$y = Ax\sin\alpha x + B\cos 3\alpha x + a\cos\alpha x$$

$$E\Theta\left\{-4A\alpha^3\cos\alpha x + Ax\alpha^4\sin\alpha x + 81\,B\alpha^4\cos 3\alpha x + \alpha^4 a\cos\alpha x - \frac{3}{8}a^3\alpha^6(\cos\alpha - 9\cos 3\alpha x)\right.$$

$$\left. + P\left\{2A\alpha\cos\alpha x - Ax\alpha^2\sin\alpha x - 9B\alpha^2\cos 3\alpha x - \alpha^2 a\cos\alpha x\right\} + \rho g\left(Ax\sin\alpha x + B\cos 3\alpha x + a\cos\alpha x\right) = 0$$

$$A\left(-4E\Theta\alpha^3 + 2P\alpha\right) = \frac{3}{8}a^3\alpha^6\,E\Theta$$

$$B\left(E\Theta\cdot 81\alpha^4 - 9P\alpha^2 + \rho g\right) = \frac{27}{8}a^3\alpha^6$$

$$y = a\cos\alpha x + \frac{3}{16}\frac{a^3\alpha^5\,E\Theta}{P - 2\alpha^2 E\Theta}\,x\sin\alpha x + \frac{27}{8}\frac{a^3\alpha^6\,E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9P\alpha^2 + \rho g}\cos 3\alpha x$$

$$\alpha x = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$a\sin\delta + \frac{3}{16}\frac{a^3\alpha^4 E\Theta}{P - 2\alpha^2 E\Theta}\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\cos\delta - \frac{27}{8}\frac{a^3\alpha^6\,E\Theta}{81\alpha^4 E\Theta - 9P\alpha^2 + \rho g}\sin\delta = 0$$

$$\delta = +\frac{3}{16}\frac{a^2\alpha^4\,E\Theta}{2\alpha^2 E\Theta - P}\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l} + \varepsilon$$

$$\alpha l = \pi\left[1 - \frac{3}{16}\frac{a^2\alpha^4 E\Theta}{2\alpha^2 E\Theta - P}\right]$$

$$\pi + l\varepsilon = \pi\left[1 - \frac{3}{16}\frac{a^2 E\Theta\left(\frac{\pi^4}{l^4} + 4\varepsilon\frac{\pi^3}{l^3}\right)}{2E\Theta\left(\frac{\pi^2}{l^2} + 2\varepsilon\frac{\pi}{l}\right) - P}\right]$$

$$\varepsilon = -\frac{\pi}{l}\frac{3}{16}\frac{a^2 E\Theta\frac{\pi^4}{l^4}}{2E\Theta\frac{\pi^2}{l^2} - P}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{l}\left[1 - \frac{3}{16}\frac{a^2\frac{\pi^2}{l^2}}{\left(2 - \frac{P}{E\Theta}\frac{l^2}{\pi^2}\right)}\right] = \sqrt{\frac{P}{2E\Theta} \pm \sqrt{\left(\frac{P}{2E\Theta}\right)^2 - \frac{\rho g}{E\Theta}}}$$

znowu P ten wykres umniejsza jeśli $\frac{P}{E\Theta}\frac{l^2}{\pi^2} < 2$
(w pewnych granicach!)

$$\frac{l^2}{\pi^2} \ldots \frac{P}{\sqrt{E\Theta\rho g}} > 2 \qquad \frac{E\Theta}{P^2} < \frac{1}{4\rho g}$$

równocześnie musi być

$$P > 2\sqrt{E\Theta\rho g}$$

$$\frac{P^2}{E\Theta} > 4\rho g$$

$$P = \alpha^2 E\theta + \frac{\rho g}{\alpha^2} + p \qquad \frac{E\theta}{\rho g}\alpha^4 > 1$$

$$\sin\alpha\lambda - \frac{3a^2\alpha^5 E\theta}{16\left[\alpha^2 E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^2} - p\right]}(l-\lambda)\cos\alpha\lambda + \frac{27}{8}\frac{a^2\alpha^6 E\theta}{72\alpha^4 E\theta - 8\rho g - 9\alpha^2 p}\sin 3\alpha\lambda = 0$$

~~$\sin\alpha\lambda - 3a^2$~~

$$\alpha\lambda - \frac{\alpha^3\lambda^3}{6} = \frac{3}{16}\frac{a^2\alpha^3 E\theta(l-\lambda)\left(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{2}\right)}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}} - \frac{27 \cdot 3 \cdot a^2\alpha^2 E\theta\,\alpha\lambda}{8\left(72 E\theta - 8\frac{\rho g}{\alpha^4} - 9\frac{p}{\alpha^2}\right)}$$

$$\frac{\lambda}{l}\left[1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{6}\right] = a^2\alpha^2\left\{\frac{3}{16}\frac{E\theta\left(1-\frac{\lambda}{l}\right)\left(1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{2}\right)}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}} - \frac{81}{8}\frac{E\theta\frac{\lambda}{l}\left(1-\frac{9\alpha^2\lambda^2}{6}\right)}{72 E\theta - 8\frac{\rho g}{\alpha^4} - 9\frac{p}{\alpha^2}}\right\} \qquad \lambda \cdots \frac{a^2}{l}$$

$$a^2\frac{a^2}{l^4}$$

$$\left(\frac{y_0}{a}\right) = 3a^2\alpha^2\left[\frac{\alpha\lambda}{8\left(E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}\right)} + \frac{27\,\alpha\lambda}{72 E\theta - 8\frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{9p}{\alpha^2}}\right]$$

$$\frac{\lambda}{l}\left[1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{6}\right] = a^2\alpha^2\left\{\frac{3}{16}\frac{E\theta}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}} - \frac{\lambda}{l}\left[\frac{3}{16}\frac{E\theta}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}} + \frac{81}{8}\frac{E\theta}{72 E\theta - 8\frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{9p}{\alpha^2}}\right]\right\}$$

$$\left(\frac{y_0}{a}\right) = 3a^2\alpha^2 \qquad \frac{\lambda}{l}\Big[$$

$$3\frac{\lambda}{l}\left[1-\frac{\alpha^2\lambda^2}{6}\right]\left\{\frac{\alpha\lambda}{8 \cdot E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}}\right.$$

$$\frac{\lambda}{l} = a^2\alpha^2\left(M - \frac{\lambda}{l}N\right) \qquad \frac{\lambda}{l} = \frac{a^2\alpha^2 M}{1 + a^2\alpha^2 N} = a^2\alpha^2 M\left[1 - a^2\alpha^2 N\right]$$

$$\alpha = \frac{n}{l}$$

$$\frac{\lambda}{l} \neq a^2\alpha^2\,\frac{3}{16}\frac{E\theta}{E\theta - \frac{\rho g}{\alpha^4} - \frac{p}{\alpha^2}}$$

więc czem większe p, tem większe λ (przy danem a^2)
a^2 λ (" p)
p mniejsze a^2 (" λ !?)

W rosi n warstw: z których każda grubości h:

$$2\sqrt{\frac{2}{3}\frac{E h \rho g}{(1-\mu^2) n}} < \frac{P}{nh} < F$$

$F = 8.10^5 g$

$\rho = 2$

$E = 8.10^7 g$

$h = n.10^3$

$$\lambda = 2\pi \sqrt[4]{\frac{2}{3}\frac{E h^3 n}{(1-\mu^2)\rho g}}$$

$$\frac{2}{3}\frac{E}{(1-\mu^2)} \mp \frac{n F^2}{h \rho g} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4 \frac{\rho g}{h^3 n}$$

$$n^2 h^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4 \left(\frac{\rho g}{F}\right)^2$$

$$hn = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \frac{\rho g}{F}$$

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{nh.F}{\rho g}}$$

$$\frac{3}{8}.\frac{1}{100}\frac{2.10^5.g}{2{\cdot}8.g}10^3$$

$nh = 10\,km = 10^6$

$F = 8.10^5 g$

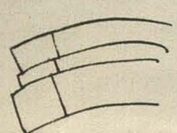
$\rho = 2$

$n^2 = 10^3$

$n = 30$

$h = 300\,m$

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{10^6.8.10^5}{2}} = 2\pi\sqrt{4.10^{11}} = 40.10^5 = 40\,km$$



(I) =

$D = \sum_n E_n h_n^3$ jeśli $E_i = E_k$, $F_i = F_k$ $D = E\sum_n h_n^3$

$P = \sum F_n h$ $P = F\sum h$

$$\sqrt{\frac{\rho g \cdot \sum h^3}{(\sum h)^2}} = F$$

$$\lambda = 2\pi\sqrt[4]{\frac{2}{3}\frac{E\sum h^3}{(1-\mu^2)\rho g}}$$

$$\frac{2}{3}\frac{E\rho g}{(1-\mu^2)} = \frac{F^2(\sum h)^2}{\sum h^3} = (\rho g)^2 \frac{\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4}{\sum h^3}$$

$$\sum h = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\frac{\rho g}{F}$$

$$\pi\sqrt{\frac{\frac{4}{}.10^5 g.10^6}{2{\cdot}8.g}} = \pi\sqrt{\frac{40}{0{\cdot}7}}\,10^5 = 3{\cdot}14.\sqrt{57} = 7{\cdot}5$$

$0{\cdot}7$ $22{\cdot}5$

$$\frac{1}{12}h = \frac{F^2 n}{4E\rho g}$$

$nh = 10^6$

$$h^2 = \frac{12}{4}F^2$$

$$\frac{1}{12}h = \frac{F^2 n}{4E\rho g}$$

$nh = 10^6$

$$h^2 = \frac{3F^2.10^6}{E\rho g}$$

$$h = \sqrt{3}.10^3\sqrt{\frac{F}{E}\frac{F}{\rho g}} = 10^3\sqrt{10^3} \quad 30$$

$$10^3\sqrt{\frac{2{\cdot}6.10^2}{2{\cdot}8}} = 10^5\sqrt{0{\cdot}86} \quad 0{\cdot}93$$

$$\sqrt{\frac{.10^3}{.2{\cdot}8}}$$

Lwowska c. k. naukowa Komisya egzaminacyjna dla kandydatów zawodu nauczycielskiego w gimnazyach i szkołach realnych.

Temat pracy Klauzurowej

z zakresu fizyki *jako przedmiotu* próbnego

dla P. R. Drzeżopolskiego

1). O ile by się przyspieszył na dzień chód zegara wahadłowego, gdyby pod nim w odle

$P = D\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 + \rho g\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2$

$\lambda = 2\pi\sqrt[4]{\frac{D}{\rho g}}$

$\frac{\lambda}{\pi} = 2\sqrt[4]{\frac{D}{\rho g}}$

$P = D\sqrt{\frac{\rho g}{D}} + \rho g\sqrt{\frac{D}{\rho g}}$

$= 2\sqrt{D\rho g}$

$\left(\alpha^2\sqrt{D} + \sqrt{\rho g}\right)^2 = 0$

$\alpha = \sqrt[4]{\frac{\rho g}{D}}$

$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt[4]{\ }$

data ....

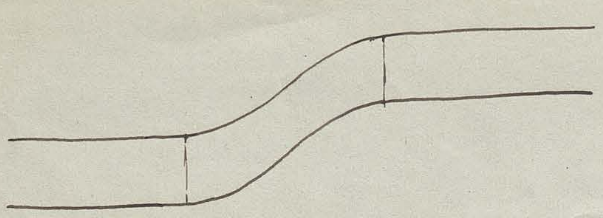
podpis egzaminatora ....

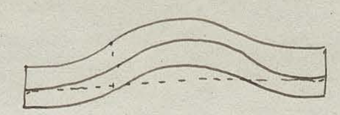
Ocena pracy:

data ....

podpis egzaminatora ....

Uwaga: Stosownie do art. XXIII przepisów egzam. i rozporządzenia c. k. Ministerstwa z dnia 30. sierpnia 1897 L. 20739 (ustęp ostatni) ma ocena z każdej części egzaminu streszczać się w notach: celująco, zadowalniająco, dostatecznie lub niedostatecznie. Noty te mogą (ale nie muszą) być uzasadnione w krótki sposób.





$X_x = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$ $\quad X_y = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ $\quad \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0$

$Y_y = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0$

~~$Z_z = \lambda\Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$~~

$u = 0$

$X_x = \lambda \frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$ $\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$

$Y_y = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}$ $\quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$

$X_y = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$

$u = Ay \cos\alpha x$ $\quad X_x = [-A\alpha y \sin\alpha x\,[\lambda + 2\mu]$

$v = B \sin\alpha x$ $\quad Y_y = -A\alpha y \sin\alpha x\ \lambda$

$X_y = [\mu A + \alpha B]\cos\alpha x$

$-(\lambda+2\mu)y A\alpha^2 \cos\alpha x = 0$

$-\alpha\mu(A + \alpha B)$ ~~$\sin\alpha x$~~ $- A\alpha\lambda$ ~~$\sin\alpha x$~~ $= 0$

$u = A f(y) \cos\alpha x$ $\quad X_x = -A\alpha f(y) \sin\alpha x\,(\lambda + 2\mu)$

$v = B \sin\alpha x$ ~~$\varphi(y)$~~ $\quad Y_y = -\ \text{—}\ \lambda$

$X_y = \mu\,[A f'(y) + \alpha B]\cos\alpha x$

$-A\alpha^2 f(y)\cos\alpha x\,(\lambda+2\mu) + \mu A f''(y)\cos\alpha x = 0$ $\quad (\lambda+2\mu)\,\alpha^2 f(y) = \mu f''(y)$

$-\alpha\mu\,[A f'(y) + \alpha B]\sin\alpha x - A\alpha f'(y)\lambda \sin\alpha x = 0$ $\quad (\lambda+\mu)\, f'(y) = -\alpha B\mu$

$X_x = Y_y = X_y = 0$ $\quad Z_z = -\frac{W(l-z)x}{\theta}$ $\quad \frac{\partial}{\partial y} = 0$ $\quad \frac{\partial X_z}{\partial x} = 0$ $\quad$ Flexure of plate

$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{Wx}{\theta} = 0$ $\quad Y_z = 0$

$X_z = 0 \;\Big|^{x = \pm a}$

~~$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$~~

~~$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$~~

$X_z = -\frac{Wx^2}{2\theta} + c = \frac{W}{2\theta}(a^2 - x^2)$

$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{W}{2\theta}\frac{(a^2-x^2)}{\mu}$

~~$(\lambda+2\mu)\Delta = -\frac{W(l-z)x}{\theta}$~~

~~$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda}{2\mu}\frac{W(l-z)x}{(\lambda+2\mu)\theta} = \frac{\partial v}{\partial y}$~~

~~$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{W(l-z)x}{(\lambda+2\mu)\theta}\left[-1 - \frac{\lambda}{\mu}\right]$~~

~~$= -\frac{W(l-z)x}{(\lambda+2\mu)\theta}\frac{\lambda+\mu}{\mu}$~~

$(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ $\quad (\lambda+2\mu)$

~~$\lambda\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\frac{\partial w}{\partial z} =$~~

$(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{W(l-z)x}{\theta}$ $\quad (\lambda$ [illegible]

$\left[(\lambda+2\mu)^2 - \lambda^2\right]\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{W(l-z)x}{\theta}\lambda$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{W(l-z)x\,\lambda}{4(\lambda+\mu)\mu\,\theta}$ $\quad \Big\|\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\lambda+2\mu}{\lambda}\ \frac{W(l-z)x}{4(\lambda+\mu)\mu\,\theta}$

Elastica wygięta; zależność a od P.

$$y = a\cos\alpha x - \frac{3}{16}a^3\alpha^3 x\sin\alpha x - \frac{3}{64}a^3\alpha^2\cos 3\alpha x$$

$$l = \int_0^0 \frac{ds}{dy}\,dy = \int\left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]dx \neq x + \frac{1}{2}\underbrace{\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx}$$

~~$= \frac{dy}{dx}y - \int y\frac{dy}{dx}dx$~~

$$\alpha x_0 = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{3}{16}a^2\alpha^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -a\alpha\sin\alpha x \;\ldots\ldots$$

$$l = x + \frac{a^2\alpha^2}{2}\underbrace{\int\sin^2\alpha x\,dx}$$

$$\frac{1-\cos 2\alpha x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2\alpha x}{4\alpha} = \frac{x}{2} - \frac{\sin\alpha x\cos\alpha x}{2\alpha}$$

$$\alpha l = \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{3}{16}a^2\alpha^2\right]\left[1 + \frac{a^2\alpha^2}{4}\right] - \frac{a^2\alpha^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}\frac{3}{16}a^2\alpha^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{a^2\alpha^2}{16}\right]$$

$$a^2 = \frac{16}{\alpha^2}\left[\frac{2\alpha l}{\pi} - 1\right]$$

odwrotnie, jeśli dane l, a, można obliczyć $\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial u}{\partial z^2} = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu} \frac{Wx}{(\lambda+\mu)\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda+\mu)} \frac{Wx}{\theta}$$

$$u = \frac{W\lambda}{4\mu(\lambda+\mu)\theta}(l-z)\frac{x^2}{2} + f(z)$$

$$w = -\frac{W(\lambda+2\mu)}{4(\lambda+\mu)\mu\theta}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right)x + \varphi(x)$$

$$-\frac{W(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)\theta}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + \varphi'(x) - \frac{W\lambda \frac{x^2}{2}}{4\mu(\lambda+\mu)\theta} + f'(z) = \frac{W}{2\theta}\frac{a^2 - x^2}{\mu}$$

$$= f'(z)$$

$$f(z) = \frac{W(\lambda+2\mu)}{4\mu(\lambda+\mu)\theta}\left(\frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right)$$

$$\varphi(x) = \frac{W}{2\theta\mu}\left[a^2x - \frac{x^3}{3} + \frac{\lambda \frac{x^3}{6}}{2(\lambda+\mu)}\right]$$

$$\sin\frac{k\pi x}{l} + \alpha \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{\pi}{l}\left[k\cos\frac{k\pi x}{l} + \alpha m \cos\frac{m\pi x}{l}\right]$$

$$k + \alpha m = 0 \qquad \alpha = -\frac{k}{m}$$

$$(-1)^k k + \alpha(-1)^m m = 0$$

$$(-1)^k k - \frac{k}{m}(-1)^m m = 0$$

$$(-1)^k = (-1)^m$$

n.p. $m = k+2$

$$\alpha = -\frac{k}{k+2}$$

$$\sin\frac{k\pi x}{l} - \frac{k}{k+2}\sin\frac{(k+2)\pi x}{l}$$

Dokładne równanie:

$$E\Theta \frac{d\varphi}{ds} + P\sin\varphi + \rho g h x = M\cos\varphi \qquad M =$$

$$= \frac{\rho g h l}{2}\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{d^2y}{dx^2}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{dx}{ds} = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$= \frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^3y}{dx^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{dy}{dx}$$

$$E\Theta\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\left[1-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\} + P\frac{dy}{dx}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) + \rho g h x = M\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$$E\Theta\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right\} + P\frac{dy}{dx} + \rho g h x\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = M$$

Ogólnie jeśli $E\Theta\frac{d^3y}{dx^3} + P\frac{dy}{dx} = f(x)$ $\qquad \alpha^2 = \frac{P}{E\Theta}$

$$f(r) = 3E\Theta r^2 + P$$

$f(r) =$ $E\Theta r^3 + Pr = 0$

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} = 0 \\ \pm i\underbrace{\sqrt{\frac{P}{E\Theta}}}_{\alpha} \end{matrix}$$

$$y = \frac{1}{P}\int_{x_0}^{x} f\,dx + \frac{e^{i\alpha x}}{-3E\Theta\alpha^2+P}\int e^{-i\alpha\xi}f\,d\xi + \frac{e^{-i\alpha x}}{-3E\Theta\alpha^2+P}\int e^{i\alpha\xi}f\,d\xi$$

$$\int\frac{\left[e^{i\alpha(x-\xi)} + e^{-i\alpha(x-\xi)}\right]f\,d\xi}{P-3\alpha^2E\Theta\}=-2P}$$

$$\sum\frac{e^{r_n x}}{f'(r_n)}\int^{x} e^{-r_n x}V\,dx$$

$$y = \frac{1}{P}\int^{x} f(\xi)\,d\xi - \frac{1}{P}\int^{x} f(\xi)\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi$$

Np.: $f(\xi) = \rho g h\left(\frac{l}{2}-x\right)$

$$\int f\,d\xi = \rho g h\left(\frac{lx}{2}-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{\rho g h}{2}\left(lx - x^2\right)$$

$$\int \xi\cos\alpha(x-\xi)\,d\xi = \xi\frac{\sin\alpha(x-\xi)}{\alpha}\Bigg| + \frac{\cos\alpha(x-\xi)}{\alpha^2}\Bigg|_0^x = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2}$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P}\left[lx - x^2 + 2\left(l\frac{\sin\alpha x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2}\right)\right] + A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

$$y' = S\left[l - 2x + 2l\cos\alpha x - 2\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]$$

$$y''' = -2S\left[\alpha^2 l\cos\alpha x - \alpha\sin\alpha x\right]$$

$$y = \varsigma\left[lx - x^2 - \frac{l}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha(x-\frac{l}{2}) - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum a_k \sin\frac{k\pi x}{l} \quad + A\left(1-\cos\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \varsigma\left[l - 2x + l\,\frac{\sin\alpha(x-\frac{l}{2})}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum a_k \frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l} \quad + A\frac{\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varsigma\left[-2 + \alpha l\,\frac{\cos\alpha(x-\frac{l}{2})}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] - \sum a_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{k\pi x}{l} \quad + A\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$\Big\|\ \frac{d^3y}{dx^3} = -\varsigma\alpha^2 l\,\frac{\sin\alpha(x-\frac{l}{2})}{\sin\frac{\alpha l}{2}} - \sum a_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3\cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$U = \frac{E\theta}{2}\,\Sigma\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{E\theta}{2}\Big[\ \ldots\ldots + 4\varsigma\sum a_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{l}{k\pi}\left[(-1)^k-1\right] - \frac{2\alpha l\,\varsigma}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\cos\frac{\alpha l}{2}\sum a_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3\frac{1-(-1)^k}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}$$

$$+ \sum a_k^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{l}{2}\Big] \qquad + 2A\sum a_k\,\frac{k^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - k}{k^2-1}\left[1-(-1)^{k-1}\right]$$

$$V = 2P\varsigma\int y\,dx$$

$$= 2P\varsigma\Big[\ \ldots\ldots \quad -\frac{l}{\pi}\left[(-1)^k-1\right]\sum\frac{a_k}{k}\Big]$$

$$W = \frac{P}{2}\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{P}{2}\Big[\ \ldots\ \ldots\ -4\varsigma\sum a_k\frac{k\pi}{l}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\left[(-1)^k-1\right] + \frac{2l\varsigma}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\sum a_k\frac{k\pi}{l}\,\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}\,\frac{1-(-1)^k}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}$$

$$+ \sum a_k^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{l}{2}\Big] \qquad + 2A\sum a_k\,\frac{k\left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{k^2-1}\left[1-(-1)^{k-1}\right]$$

$$U + V - W = \ldots\ldots\ \left[(-1)^k-1\right]\varsigma\sum a_k\Big[-4\,\frac{k\pi}{l} + 2\alpha l\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\,\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\Big]\frac{E\theta}{2} + \frac{l}{2}\sum a_k^2\Big[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4\frac{E\theta}{2} - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{P}{2}\Big]$$

$$\Big[+4\,\frac{l}{k\pi} + 2\alpha l\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\,\frac{\frac{k\pi}{l}}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\Big]\frac{P}{2}$$

$$-4\frac{l}{k\pi}$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{E\theta} \qquad E\theta = \frac{P}{\alpha^2}$$

$$= \left[(-1)^k-1\right]\varsigma\,\frac{P}{2}\sum\Big\{a_k\Big[4\left(\frac{l}{k\pi} - \frac{k\pi}{l\alpha^2}\right) + 2\alpha l\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\,\frac{\frac{k\pi}{l}}{\alpha^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\left[1-\left(\frac{k\pi}{\alpha l}\right)^2\right]\Big]\Big\}$$

$$-4\frac{l}{\pi k}$$

$$+\frac{l}{2}\sum a_k^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[\left(\frac{k\pi}{\alpha l}\right)^2 - 1\right]\cdot\frac{P}{2}$$

$$= \left[(-1)^k-1\right]\frac{\varsigma P}{2}\sum a_k\Big[4\left(-\frac{k\pi}{l\alpha^2}\right) + \frac{2}{\alpha}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\cdot k\pi\Big] + \frac{Pl}{4}\sum a_k^2\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[\left(\frac{k\pi}{\alpha l}\right)^2-1\right]$$

$$+ 2A\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum a_k\,\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 k}{k^2-1} + \frac{k\alpha^2}{k^2-1}$$

$$\sum a_k\,4k\left(\frac{\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}}{\alpha} - \frac{\pi}{l\alpha^2}\right)$$

$$4\left([illegible] + \frac{k\pi}{\alpha^2 l} - [illegible] \right)$$

$$= 4\left[\frac{l}{k\pi} - \frac{k\pi}{\alpha^2 l}\right](1-k)$$

znika wskutek

$x = \mathrm{tg}\,x$

wymaga $\alpha l \leq \pi$

więc $\sin\frac{\alpha l}{2} > 0$

Warunki dla deformacji:

$$\sum k\,a_k = 0 \qquad \sum k\,a_k\left[(-1)^k\right] = 0$$

$$\varsigma\alpha^2 l > \sum\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3 a_k$$

$$> \sum\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3 a_k\left[(-1)^k\right]$$

zatem też $\sum k\,a_k\left[(-1)^k-1\right] = 0$

pozostaje z pierwszej części: $\ldots\ \sum a_k\left(\frac{l}{k\pi} - \frac{k\pi}{\alpha^2 l}\right)$

zatem $\delta V = 0$:

$$y_{\frac{l}{2}} = \varsigma\left[\frac{l^2}{4} - \frac{l}{\alpha}\,\frac{1-\cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$= \varsigma\left[\frac{l^2}{4} - \frac{l}{\alpha}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha l}{4}\right] = \frac{\varsigma l^2}{4}\left[1 - \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha l}{4}}{\frac{\alpha l}{4}}\right]$$

zawsze ujemne dopóki $\alpha l < \frac{\pi}{2}$

$$y = \frac{\rho g h}{2S}\left[\frac{l^2}{4} - \left(x-\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{l}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(1-\cos\frac{k x \pi}{l}\right)$$

$\frac{dy}{dx}$ k tylko parzyste.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2S}\left[-2x + l + l\,\frac{\sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \frac{\pi}{l}\sum a_k\, k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g h}{2S}\left[-2 + \alpha l\,\frac{\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \frac{\pi^2}{l^2}\sum a_k\, k^2 \cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$\int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_0^l \cos^2\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{2}$$

$$\int_0^l \cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^l\left[\cos\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)+\frac{k\pi x}{l}\right] + \cos\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)-\frac{k\pi x}{l}\right]\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)+\frac{k\pi x}{l}\right]}{\alpha+\frac{k\pi}{l}}\Bigg|_0^l + \frac{\sin\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)-\frac{k\pi x}{l}\right]}{\alpha-\frac{k\pi}{l}}\Bigg|_0^l\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\frac{\alpha l}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\alpha l}{2}\right)}{\alpha+\frac{k\pi}{l}} + \dots$$

$$= \sin\frac{\alpha l}{2}\left[\frac{1}{\alpha+\frac{k\pi}{l}} + \frac{1}{\alpha-\frac{k\pi}{l}}\right] = \frac{2\alpha\sin\frac{\alpha l}{2}}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}$$

$$\int_0^l \sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{1}{2}\int \cos \quad - \cos \quad = \sin\frac{\alpha l}{2}\left[\frac{1}{\alpha-\frac{k\pi}{l}} - \frac{1}{\alpha+\frac{k\pi}{l}}\right] = \frac{2k\pi}{l}\,\frac{\sin\frac{\alpha l}{2}}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}$$

$$\int_0^l x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\int_0^{\varphi=k\pi}\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\Big[-\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\Big]_0^{k\pi} = -\frac{l^2}{(k\pi)^2}\,k\pi = -\frac{l^2}{k\pi}$$

$$\int_0^l x\sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha l}\varphi\sin\left(\varphi-\frac{\alpha l}{2}\right)d\varphi = \frac{1}{\alpha^2}\int\varphi\sin\varphi\,d\varphi\cdot\cos\frac{\alpha l}{2} - \int\varphi\cos\varphi\,d\varphi\,\sin\frac{\alpha l}{2}$$

$\varphi\sin\varphi + \cos\varphi$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[\cos\frac{\alpha l}{2}\left(\sin\alpha l - \alpha l\cos\alpha l\right) - \sin\frac{\alpha l}{2}\left(\alpha l\sin\alpha l + \cos\alpha l - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\Big[-\alpha l\underbrace{\left(\cos\alpha l\cos\frac{\alpha l}{2} + \sin\alpha l\sin\frac{\alpha l}{2}\right)}_{\cos\frac{\alpha l}{2}} + \underbrace{2\sin\frac{\alpha l}{2}\cos^2\frac{\alpha l}{2} + 2\sin^3\frac{\alpha l}{2}}_{2\sin\frac{\alpha l}{2}}\Big]$$

$$\int_0^l \sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)dx = -\frac{1}{\alpha}\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)\Big|_0^l = 0$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\left[2\sin\frac{\alpha l}{2} - \alpha l\cos\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_l^0 = 0 \qquad \int_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0 \qquad \int_0^l \cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)dx = \frac{1}{\alpha}\sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)\Big|_0^l = \frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha l}{2}$$

$$U = \frac{E\Theta}{2}\left[4S^2 l + \frac{S^2\alpha^2 l^3}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + lS^2\alpha l^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \left(\frac{\pi^2}{l^2}\right)^2\sum a_k^2\,k^4\,\frac{l}{2} - \frac{4\alpha l}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\,S^2\,\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha l}{2} + \frac{4S\pi^2\alpha^2}{l}\sum\frac{a_k k^2}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{E\Theta}{2}\left[-4S^2 l + \frac{S^2\alpha^2 l^3}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + S^2\alpha l^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{\pi^4}{2l^3}\sum k^4 a_k^2 + \frac{4S\pi^2\alpha^2}{l}\sum\frac{k^2 a_k}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\right]$$

$$V = 2PS^2\left[-\frac{l^3}{3} + \frac{l^3}{2} - \frac{l}{\alpha\sin\frac{\alpha l}{2}}\left[\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha l}{2} - l\cos\frac{\alpha l}{2}\right]\right] + 2PlS\sum_{k=2}^{\infty}a_k$$

$$= 2P\left[\frac{S^2 l^3}{6} - \frac{2lS^2}{\alpha^2} + \frac{l^2S^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + lS\sum a_k\right]$$

$$W = \frac{P}{2}\left[+S^2\frac{4l^3}{3} - S^2\frac{4l^3}{2} + l^3S^2 + \frac{l^3S^2}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{S^2l^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{l}{2}\sum a_k^2k^2 - \frac{4S^2l}{\alpha^2}\left(2 - \alpha l\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{4S\pi}{l}\sum a_k\frac{k}{k\pi}l^2 + 4S\pi\sum a_k\frac{k^2\pi}{l}\,\frac{1}{\alpha^2-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\right]$$

Z rozwiązań tylko w postaci formie: $\delta = a\left[\sin\frac{\pi x}{l} - \frac{1}{(2k+1)}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]$ albo $a\left[\sin\frac{3\pi x}{l} - \frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}\right]$

$3\sin\alpha - \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha\sin\alpha = \sin\alpha\left[3 - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right] = 4\sin^3\alpha$

$$U = \frac{E\theta}{2}\Big[\ldots + 4 g \sum_k a_k \Big[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{\pi}\left[(-1)^k - 1\right] - \frac{k(k+2)\pi^2}{l^2}\frac{l}{\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\Big]$$

$$- 2\frac{g\alpha l \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}} \sum a_k \Big[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{k\pi}{l}\frac{1-(-1)^k}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2} - \frac{k(k+2)\pi^2}{l^2}\frac{(k+2)\pi}{l}\frac{1-(-1)^k}{\frac{(k+2)^2\pi^2}{l^2} - \alpha^2}\Big]$$

$$+ \sum a_k^2 \Big[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + \frac{k^2(k+2)^2\pi^4}{l^4}\Big]\frac{l}{2}$$

$$= \frac{E\theta}{2}\Big[\ldots + 4g\frac{\pi}{l}\left[(-1)^k - 1\right]\sum a_k \Big[\underbrace{k^2 - k(k+2)}_{-2k} + k\frac{\alpha l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\Big\{\frac{\frac{k^2\pi^2}{l^2}}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2} - \frac{\frac{(k+2)^2\pi^2}{l^2}}{\frac{(k+2)^2\pi^2}{l^2} - \alpha^2}\Big\} + \ldots$$

$$= \Big\{\frac{\alpha^2}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha^2}{\left(\frac{(k+2)\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2}\Big\}$$

$$+ \sum a_k^2 k^2 (1+k) \sim \frac{2\pi^4}{l^3}$$

$$V = 2\theta g\Big[\ldots \ldots + \sum a_k \frac{l}{\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\frac{2}{k+2}\Big]$$

$$W = \frac{P}{2}\Big[\ldots - 4g\sum a_k\left[(-1)^k - 1\right]\frac{l^2}{\pi^2}\frac{k\pi}{l}\underbrace{\left[\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+2)^2}\right]}_{\frac{4k+4}{k^2(k+2)^2}} + \frac{2\ell g}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\sum a_k \frac{k\pi}{l}\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}\left[1-(-1)^k\right]\left[\frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} - \frac{1}{\alpha^2 - \frac{(k+2)^2\pi^2}{l^2}}\right]$$

$$+ \frac{l}{2}\sum a_k^2\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{k(k+2)}{l^2}\pi^2\right]$$

$$= \frac{P}{2}\Big[\ldots + \left[1-(-1)^k\right] g l \sum \frac{8 a_k}{k+2} + 2\alpha g \pi \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\sum a_k k\left[\frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} - \frac{1}{\alpha^2 - \frac{(k+2)^2\pi^2}{l^2}}\right]$$

$$+ \frac{l}{2}\Sigma.$$

$$U + V - W = \sum\left[(-1)^k - 1\right] g a_k \Big\{ + \frac{8\pi}{l}k\frac{E\theta}{2} + \frac{4}{k+2}\frac{l}{\pi}P + 8\frac{P}{\pi}\frac{l\,(k+1)}{k(k+2)^2}$$

$$+ \sum\left[(-1)^k - 1\right] g a_k \Big\{ E\theta\,\alpha^3 k \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\left[\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2} - \frac{1}{\left(\frac{(k+2)\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2}\right] = 0$$

$$+ P\alpha \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} k\pi\left[\frac{1}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} - \frac{1}{\ldots}\right]$$

$$+ \sum a_k^2 \frac{l}{4}\Big\{\frac{E\theta}{2}\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 + \frac{k^2(k+2)^2\pi^4}{l^4}\right] - \frac{P}{2}\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \frac{k(k+2)}{l^2}\pi^2\right]\Big\}$$

$$= \sum\left[(-1)^k - 1\right] g a_k \Big\{ + 4\frac{k\pi}{l}E\theta + \frac{4P}{k+2}\frac{l}{\pi}\underbrace{\left(-1 + 2\frac{k+1}{k(k+2)}\right)}_{-\frac{k^2+2}{k(k+2)}}\Big\} + \sum a_k^2 \ldots$$

$$= \sum\left[(-1)^k - 1\right] g a_k\, 4\Big\{E\theta\frac{k\pi}{l} - P\frac{l\,(k^2+2)}{k\pi(k+2)^2}\Big\} + \sum a_k^2 \frac{E\theta\,\pi^4}{4 l^3} k^2 (2k^2 + 4k + 4) > 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -g\alpha^2 l\frac{\sin\alpha\left(x - \frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha l}{2}} - \sum a_k\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3\cos\frac{k\pi x}{l} - \frac{k(k+2)^2\pi^3}{l^3}\cos\frac{(k+2)\pi x}{l}\right]$$

$x = 0$: $= g\alpha^2 l + 4\sum a_k\left[\frac{k^2\pi^3}{l^3}(k+1)\right]$

$x = l$: $= -g\alpha^2 l + (-1)^k\, 4\sum a_k \frac{k^2(k+1)\pi^3}{l^3}$

jeżeli k ~~parzyste~~ $\left|\ldots a_k \frac{k^2(k+1)\pi^3}{l^3}\right| < |g\alpha^2 l|$

kiedy parzyste: Σ ... ...

$$4\sum a_k k^2(k+1)\frac{\pi^3}{l^3} > -g\alpha^2 l$$

$\beta y = 0$

$D\beta^2 = P$

$$y = a\sin\beta x + \frac{3\beta^3 a^3}{16}\,x\cos\beta x + \frac{3\beta^2 a^3}{64}\cos 3\beta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta\left[a\cos\beta x + \frac{3\beta^2 a^3}{16}\cos\beta x - \frac{3\beta^3 a^3}{16}\,x\sin\beta x + \frac{9}{64}a^3\beta^2\cos 3\beta x\right]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \beta^2 a^2\left[\cos^2\beta x\left[1 + \frac{3a^2\beta^2}{16}\right]^2 - 2\cos\beta x\left[\frac{3\beta^3 a^3}{16}\,x\sin\beta x - \frac{9}{64}a^3\beta^2\cos 3\beta x\right]\right]$$

$\beta^2 D = P$

$\beta = \sqrt{\frac{P}{D}}$

$$\delta = \frac{3a^2\beta^2\pi}{16}$$

$$\beta l = \pi + \frac{a^2\beta^2\pi}{4}\left[1 + \frac{3}{16}\right]$$

$$\beta l = \pi\left[1 + a^2\beta^2\right]$$

$\beta_0 l = \pi$

$$a^2 = \frac{\beta l - \pi}{\beta^2\pi} = \frac{l\sqrt{\frac{P}{D}} - \pi}{\frac{D}{P}}$$

$$P = D\frac{l^2}{\pi^2}(1+\varepsilon)$$

$$l\sqrt{\frac{P}{D}} = \pi\sqrt{1+\varepsilon} = \pi\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$a^2 = \frac{l\sqrt{\frac{P}{D}} - \pi}{\frac{P}{D}\pi}$$

$$= \frac{\pi\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \pi}{\frac{\pi^2}{l^2}\pi} = \frac{\varepsilon}{2}\frac{l^2}{\pi^2}$$

Elastica z uwzględnieniem własnego ciężaru

$$M_0 - Mx + Py + \rho g h \int_0^s (x-\xi)\, ds = -\frac{E\theta}{R} = -E\theta \frac{d\varphi}{ds}$$

$$M = \frac{1}{2}\int_0^l \rho g h\, ds = \rho g h \frac{l}{2}$$

$$-M\frac{dx}{ds} + P\frac{dy}{ds} + \rho g h\, x = -E\theta \frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

$$-M\cos\varphi + P\sin\varphi + \rho g h\, x = -E\theta\frac{d^2\varphi}{ds^2}$$

$$\left[M\sin\varphi + P\cos\varphi\right]\frac{d\varphi}{ds} + \rho g h \cos\varphi = -E\theta\frac{d^3\varphi}{ds^3}$$

Uproszczenie $-M + \rho g h s + P\sin\varphi = -E\theta \frac{d^2\varphi}{ds^2}$

~~$-M\sin\varphi - P\cos\varphi + \rho g h\int x\,d\varphi = -\frac{E\theta}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2$~~

~~$\int x\,d\varphi = x\varphi - \int\varphi\frac{dx}{ds}ds = x\varphi - \int\varphi\cos\varphi\, ds$~~

$$P\sin\varphi_0 = -E\theta\frac{d^2\varphi_0}{ds^2}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \psi$$

Przybliż. $-M + \rho g h s + P\cos\psi\sin\varphi_0 + P\sin\psi\cos\varphi_0 = -E\theta\frac{d^2\varphi_0}{ds^2} - E\theta\frac{d^2\psi}{ds^2}$

$$-M + \rho g h s + P\psi \underbrace{\cos\varphi_0}_{f.(s)} = -E\theta\frac{d^2\psi}{ds^2}$$

Przybliż.

$$E\theta\frac{d^2\psi}{ds^2} + P\psi + \rho g h s - M = 0$$

$$\psi = A\sin\left(\sqrt{\frac{P}{E\theta}}\, s + \varepsilon\right) - \frac{\rho g h s}{P} + \frac{M}{P}$$

Najpraktyczniej tak: uważamy najpierw elastica bez ciężaru: $s = \frac{1}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_1}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$

a następnie uważamy na modyfikacje spowodowane ciężarem

stąd wystarczy stosować $x=s$ w wyrażeniach poprawkowych

y_0 będzie stał ... linii i nie będzie potrzeba uważać na siłę P

$$y = y_0 + y_1$$

$$M_0 - Mx + Py_1 + \rho g h\int_0^x (x-\xi)\, dx = -E\theta\frac{d^2y}{dx^2}$$

Nie prawda

Nie można użyć zasady superpozycji gdy wychylenia są skończone. Tak samo jak w przypadku

$e^{-\mu x}\cos\mu x$

$\ln y = 0.4343$

6378
2010
4974
43593

2727

Jeśli tylko P wstępnie:

$\alpha = \frac{P}{E\theta}$

$$U+V-W = \frac{E\theta}{2}\left[-4\,\delta^2 l + \frac{\delta^2\alpha l^3}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \delta^2\alpha l^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$+ 2P\left[\frac{\delta^2 l^3}{6} - \frac{2l\delta^2}{\alpha^2} + \frac{l^2\delta^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$- \frac{P}{2}\left[\frac{\delta^2 l^3}{3} + \frac{\delta^2 l^3}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{8\delta^2 l}{\alpha^2} + \frac{3\delta^2 l^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$= P\left\{-\frac{2\delta^2 l}{\alpha^2} + \frac{\delta^2 l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \frac{\delta^2 l^2}{2\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right.$$

$$+ \frac{\delta^2 l^3}{3} + \frac{2l^2\delta^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}$$

$$\left. + 4\frac{\delta^2 l}{\alpha^2} - \frac{\delta^2 l^3}{6} - \frac{\delta^2 l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{3\delta^2 l^2}{2\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right\}$$

$$= P\left\{-\frac{2\delta^2 l}{\alpha^2} + \frac{\delta^2 l^3}{6} + \frac{\delta^2 l^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right\} = \frac{V}{2}!$$

$V = \eta\, P g h$

Jeśli P dane, l zmienne

~~o ile P zmienne, warunek na minimum:~~

$$-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{6} + \frac{l}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = 0$$

$$\therefore\ \frac{\alpha^2 l^2}{6} + \alpha l \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = 2$$

$\frac{\partial}{\partial l} = 0$

$$-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{l^2}{2} + \frac{2l}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{l^2}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} = 0$$

$$\frac{l^2}{2}\left[1 - \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha l}{2}}\right] + \frac{2l}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = \frac{2}{\alpha^2}$$

$$-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha l}{2}$$

$$\alpha^2 l^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha l}{2} - 4\alpha l \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + 4 = 0$$

$$\left[\alpha l \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} - 2\right]^2 = 0$$

$$\frac{\alpha l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = 1$$

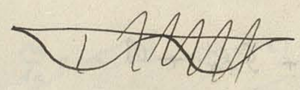
$$\frac{\alpha l}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}$$

co to prowadzi do tg; wyniku dla naszego ...

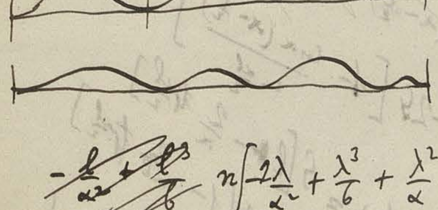
dla bardzo małych l: $\frac{\alpha l^2}{2} = \pi$

Tylko: więc: $\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = 0$

kiedy $\left(\frac{d^2 l}{dx^2}\right)_0 = 0$



n



$$n\left[-\frac{2\lambda}{\alpha^2} + \frac{\lambda^3}{6} + \frac{\lambda^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\lambda}{2}\right] <$$

$$< n\left[-\frac{2(\lambda - d\lambda)}{\alpha^2} + \frac{(\lambda - d\lambda)^3}{6} + \frac{(\lambda - d\lambda)^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha(\lambda - d\lambda)}{2}\right]$$

$$+ \left[-\frac{2n\,d\lambda}{\alpha^2} + \frac{n^3 d\lambda^3}{6} + \frac{n^2 d\lambda^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha n\, d\lambda}{2}\right]$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha n\, d\lambda}{2}}{\sin\frac{\alpha n\, d\lambda}{2}} = \frac{2}{\alpha n\, d\lambda}$$

$$\frac{n^3 d\lambda^3}{6} + \frac{n^2 d\lambda^2}{\alpha}\frac{2}{\alpha n\, d\lambda} \ldots$$

$$= \frac{n^3 d\lambda^3}{6} - \frac{n^3 d\lambda^3}{12}$$

$$\ldots - \frac{1}{6}\left(\frac{\alpha n\, d\lambda}{2}\right)^2$$

$$0 < n\left[\frac{d\lambda}{\alpha^2} - \frac{\lambda^2 d\lambda}{2}\right]$$

$$n\left[-\frac{2}{\alpha^2} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{2\lambda}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha\lambda}{2}}\right] \lesseqgtr + \frac{n^3 d\lambda^3}{12}$$

Jeśli jeszcze łuk wstępnie, to ... na zmianie

dojście do ostatniego ...

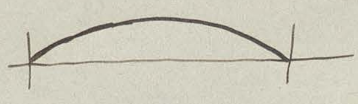
tylko pod warunkiem, że $\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4\pi^2}{l^2}a_2 > 0$

więc ... w ... przyjąć $\delta = a_2\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{l}\right)$

ale wtedy nie prostuje konkluzja, że $\left(E\theta\frac{4\pi^2}{l^2} - P\right) > 0$

... dla ... co ...

Pod załamaniem



$y=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ $\Big\}$ $x=0$, $x=l$

$$y = A \sin(\alpha x+\varepsilon) - \mathcal{G}x^2 + \mathcal{G}lx + B$$

$A \sin\varepsilon + B = 0$

$A \sin(\alpha l+\varepsilon) + B = 0$

$-\alpha^2 A \sin\varepsilon - 2\mathcal{G} = 0$

$-\alpha^2 A \sin(\alpha l+\varepsilon) - 2\mathcal{G} = 0$

albo: $\alpha l = 2k\pi$

albo: $\varepsilon = \frac{\alpha l}{2} + (2k\pi)\frac{\pi}{2}$

$B = -A\sin\varepsilon = + \frac{2\mathcal{G}}{\alpha^2}$

$$y = \mathcal{G}\left[\frac{2}{\alpha^2} - x^2 + lx - \frac{2}{\alpha^2}\frac{\sin(\alpha x+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\right]$$

$$y = \mathcal{G}\left[lx - x^2 - \frac{2\left[\cos\alpha(x-\frac{l}{2}) - \cos\frac{\alpha l}{2}\right]}{\alpha^2 \cos\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$l = \frac{2k\pi}{\alpha}$

$$y = \mathcal{G}\left[lx - x^2 - \frac{2[\sin(\alpha x+\varepsilon) - \sin\varepsilon]}{\alpha^2\sin\varepsilon}\right]$$

$$y_{\frac{l}{2}} = \mathcal{G}\left[\frac{l^2}{4} - \frac{2\left(1-\cos\frac{\alpha l}{2}\right)}{\alpha^2\cos\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$y_{\frac{l}{2}} = \mathcal{G}\left[\frac{l^2}{4} - \frac{2[\sin(k\pi+\varepsilon) - \sin\varepsilon]}{\alpha^2\sin\varepsilon}\right]$$

$= \mathcal{G}\left[\frac{l^2}{4}\right]$ k = parzyste

$= \mathcal{G}\left[\frac{l^2}{4} + \frac{4}{\alpha^2}\right]$ k = nieparzyste

czy to mi może się stać $=0$?

$$\frac{\alpha^2 l^2}{8} = \frac{1-\cos\frac{\alpha l}{2}}{\cos\frac{\alpha l}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha l}{4}}{\cos^2 - \sin^2\frac{\alpha l}{4}} = \frac{2}{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha l}{4} - 1}$$

a jakie tam będzie $\frac{dy}{dx} = \mathcal{G}\left[l - 2x + \frac{2\sin\alpha(x-\frac{l}{2})}{\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}\right]$

$x = \frac{l}{2}$ $= 0$

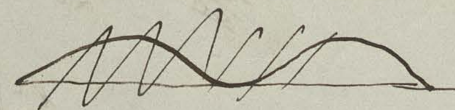
w każdym razie

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \mathcal{G}\left[l + \frac{2\operatorname{ctg}\varepsilon}{\alpha}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \mathcal{G}\left[l - 2x - \frac{2\cos(\alpha x+\varepsilon)}{\alpha\sin\varepsilon}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathcal{G}\left[-2 + \frac{2\sin(\alpha x+\varepsilon)}{\sin\varepsilon}\right]$$

możliwe oznaczenie ε dowolne

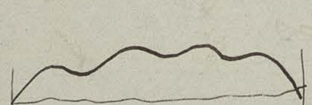


Punkty przegięcia: $\alpha x = 2m\pi$

w odstępach $\alpha x = 2\pi$

w razie $\frac{\alpha l}{2} \neq \frac{\pi}{2}$

czy będzie punkt przegięcia? $\cos\left(\frac{\alpha l}{2} - \alpha x\right)$ " $\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)$



$k=1$

$l = \frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{E\Theta}{S}}$

Najprostszy wypadek:

wogóle asymetrya: $\sin(\alpha x+\varepsilon)$ $\sin(\alpha(l-x)+\varepsilon)$

$= \sin(2k\pi - \alpha x + \varepsilon)$

$= \sin(\varepsilon - \alpha x)$

$\cos(\pi - \alpha x) = -\cos\alpha x$

$$\frac{dy}{dx} = -2\mathcal{G}\left[1 - \frac{\cos\alpha(x-\frac{l}{2})}{\cos\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \mathcal{G}\left[l - \frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\right] = \mathcal{G}l\left[1 - \frac{2}{\alpha l}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

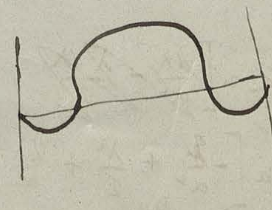
co jest różne z wyjątkiem $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$

Wtedy: $y = \mathcal{G}\left[lx - x^2 - \frac{2(\cos\alpha x - 1)}{\alpha^2}\right]$

to jest identyczne jeśli $\frac{\alpha l}{2} = 0, \pi$

Tymczasem stabilność wymaga $\alpha l \leqq \pi$

Zatem w razie $\frac{\alpha l}{2} < \frac{\pi}{2}$ zawsze ujemne!



!

$y = A \sin(\alpha x + \varepsilon) - g x^2 + g l x + B$

$A \sin\varepsilon + B = 0$ $y=0 \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases}$ ... $\frac{dy}{dx}=0$

$A \cos(\alpha l + \varepsilon) + B = 0$

$\frac{dy}{dx} = \alpha A \cos(\alpha x + \varepsilon) + g(l - 2x)$

$\alpha A \cos\varepsilon + g l = 0$

$\alpha A \cos(\alpha l + \varepsilon) - g l = 0$

$= \alpha A \cos\varepsilon - g l$

$\sin(\alpha l + \varepsilon) = \sin\varepsilon$

~~$\alpha l = 2k\pi$~~

~~$y = A[\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin\varepsilon] + g\frac{x}{2}(l - x)$~~

~~$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\alpha^2 \sin(\alpha x + \varepsilon) - 2g$~~

$\cos(\alpha l + \varepsilon)\cos\varepsilon - \sin(\alpha l + \varepsilon)\sin\varepsilon$

$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}$

$\sin(\alpha l + \varepsilon) - \sin\varepsilon = 0$

$\cos\left(\frac{\alpha l}{2} + \varepsilon\right)\sin\frac{\alpha l}{2} = 0$

więc albo $\frac{\alpha l}{2} = k\pi$ albo $\frac{\alpha l}{2} + \varepsilon = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$\alpha l = 2k\pi$ $\varepsilon = -\frac{\alpha l}{2} + (2k+1)\frac{\pi}{2}$

$y = A[\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin\varepsilon] + g l x - g x^2$

$\frac{dy}{dx} = \alpha A \cos(\alpha x + \varepsilon) + g l - 2 g x$

$$\begin{cases} \alpha A \cos\varepsilon + g l = 0 \\ \alpha A \cos(\alpha l + \varepsilon) - g l = 0 \end{cases}$$

$(-1)^k \alpha A \sin\frac{\alpha l}{2} + g l = 0$

zatem pozostaje tylko $(-1)^{k+1} \alpha A \sin\frac{\alpha l}{2} - g l = 0$

niemożliwe

co są równania identyczne!

zatem tylko jeszcze $\alpha A \sin\frac{\alpha l}{2} = (-1)^{k+1} g l$

$A = (-1)^{k+1} \frac{g l}{\alpha \sin\frac{\alpha l}{2}}$

$\cos\left[\alpha\left(x - \frac{l}{2}\right) + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^k \cos\alpha\left(x - \frac{l}{2}\right)$

~~$y = g\left[lx - x^2 \mp \frac{l}{\alpha}\frac{\sin(\alpha x + \varepsilon) - \sin\varepsilon}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right]$~~

$\cos\left[-\frac{\alpha l}{2} + 2\ldots\right] = (-1)^k \cos\frac{\alpha l}{2}$

$$y = g\left[lx - x^2 + (-1)^{2k+1}\frac{l}{\alpha}\frac{\sin\left(\frac{\alpha l}{2} - \alpha x\right) - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$U+V=\sum[(-1)^k-1]\ \frac{gP}{} \ a_k\left[-2\frac{k^2\pi}{\alpha^2 l}+\frac{l}{\alpha}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}-2\frac{l}{\pi}\right]+\frac{lP}{4}\sum a_k^2\frac{k^4\pi^4}{\alpha^2 l^4}$$

$$w=0=\sum\ldots\ldots a_k\left[2\frac{l}{k\pi}-\alpha l\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\frac{\frac{k\pi}{l}}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right]-\frac{lP}{4}\sum a_k^2\frac{k^2\pi^2}{l^2}=0$$

$$\sum\quad a_k\left[2\left(\frac{l}{k\pi}-\frac{k^2\pi}{\alpha^2 l}\right)-\frac{l}{\pi}\right)+\frac{l}{\alpha}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)\cdot\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right]+\frac{lP}{4}\sum a_k^2\left(\frac{k^4\pi^4}{\alpha^2 l^4}-\frac{k^2\pi^2}{l^2}\right)>0$$

~~$\sum' \left[\frac{k^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}-1\right]a_k^2\frac{k^2\pi^2}{l^2}\frac{lP}{4}+[(-1)^k-1]\,gP\,a_k$~~

Jeśli tylko wyrazy nie dzieli k: drugie wyrażenie schodzi się 2 ~~razy~~ $\frac{\alpha l}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}=1$

~~$\sum\ldots\ \frac{l}{\alpha}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\frac{k\pi}{l}=\frac{2}{\alpha^2}\frac{k\pi}{l}$~~

~~$\sum\ldots\ 2a_k\left[\frac{k\pi}{l\alpha^2}-\frac{k\pi}{l\alpha^2}-\frac{l}{\pi}\right]>0$~~

warunek: $\sum\ \frac{l}{k\pi}a_k\left[1-\frac{\alpha l}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right]=0$

przy warunku $\frac{\alpha l}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}=1$

$$\sum\frac{a_k}{k}\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}=0$$

warunek $\sum\ \frac{k\pi}{\alpha^2 l}a_k\qquad=0$

$$\sum a_k\frac{l}{k\pi}\left[1-\frac{k^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}-\frac{\alpha l}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\frac{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right]=0$$

~~$$\sum_{1,3,5,\ldots}a_k\frac{l}{k\pi}\left(1-\frac{k^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}\right)\left[1+\frac{\alpha l}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}\frac{\left(\frac{k\pi}{\alpha l}\right)^2}{\left(1-\frac{k^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}\right)^2}\right]=0$$~~

~~u nas $\frac{\alpha l}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha l}{2}=1$~~

~~$\sum' a_k\frac{l}{k\pi}$~~

$$gl>\sum a_k\frac{k\pi}{l}\left[\left(\frac{k\pi}{\alpha l}\right)^2-1\right]$$

$$\sum\frac{a_k}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\left[-2\frac{k^4\pi^3}{\alpha^2 l^3}+2\frac{k^2\pi}{l}+\frac{2}{\alpha^2}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^3-2\frac{k^2\pi}{l}+2\alpha^2\frac{l}{\pi}\right]\gtrless 0$$

$$\int_0^l \cos^2 \alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha l} \cos^2\left(\varphi-\frac{\alpha l}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha l}{2}}^{+\frac{\alpha l}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\frac{\alpha l}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\alpha l}{2}} (1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{\alpha}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\alpha l}{2}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha l}{2} + \frac{\sin \alpha l}{2}\right) = \frac{l}{2} + \frac{\sin\frac{\alpha l}{2}\cos\frac{\alpha l}{2}}{\alpha}$$

$$\int_0^l \sin^2 \alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin\frac{\alpha l}{2}\cos\frac{\alpha l}{2}}{\alpha}$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^2}{4} - \xi^2 - \frac{l}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha\xi - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum a_k \cos\alpha k\xi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2P}\left[-2\xi + \frac{l\sin\alpha\xi}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] - \alpha\sum k a_k \sin k\alpha\xi$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g h}{2P}\left[-2 + \alpha l\,\frac{\cos\alpha\xi}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] - \alpha^2\sum k^2 a_k \cos k\alpha\xi$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \sin^2 k\alpha\xi\, d\xi = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{\alpha l}{2}} \sin^2 k\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1-\cos 2k\varphi\right] d\varphi = \frac{1}{2\alpha}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4\alpha} = \int_0^{\frac{l}{2}} \cos^2 k\alpha\xi\, d\xi$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \xi\sin k\alpha\xi\, d\xi = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi\sin k\varphi\, d\varphi$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^2}{4} - \left(x-\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) - \cos\alpha\frac{l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum a_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$x=0$	$x=l$
$y=0$	$y=0$
$\frac{dy}{dx}=0$	$\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2P}\left[-2x + l + l\,\frac{\sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \frac{\pi}{l}\sum k a_k \cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g h}{2P}\left[-2 + \alpha l\,\frac{\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] - \frac{\pi^2}{l^2}\sum k^2 a_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

$$\int_0^{l} \sin^2\frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{l}{k\pi}\int_0^{k\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{l}{2k\pi}\,k\pi = \frac{l}{2} = \int_0^{l}\cos^2\frac{k\pi x}{l}\, dx$$

$$2\int_0^{l} \sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)\cos\frac{k\pi x}{l}\, dx = \int_0^{l}\left[\sin\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) + \frac{k\pi x}{l}\right] + \sin\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) - \frac{k\pi x}{l}\right]\right] dx$$

$$= \left.\frac{\cos\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)+\frac{k\pi x}{l}\right]}{\alpha + \frac{k\pi}{l}}\right|_l^0 + \left.\frac{\cos\left[\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)-\frac{k\pi x}{l}\right]}{\alpha - \frac{k\pi}{l}}\right|_l^0 = \frac{\cos\frac{\alpha l}{2} - \cos\left(\frac{\alpha l}{2}+k\pi\right)}{\alpha+\frac{k\pi}{l}} + \frac{\cos\frac{\alpha l}{2} - \cos\left(\frac{\alpha l}{2}-k\pi\right)}{\alpha-\frac{k\pi}{l}}$$

$$= \cos\frac{\alpha l}{2}\left\{\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{\alpha+\frac{k\pi}{l}} + \frac{1-(-1)^k}{\alpha-\frac{k\pi}{l}}\right\} = \cos\alpha l\;\frac{2\alpha\left[1-(-1)^k\right]}{\alpha^2 - \frac{k^2\pi^2}{l^2}}$$

$$\int_0^{l}\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)$$

Przykład.

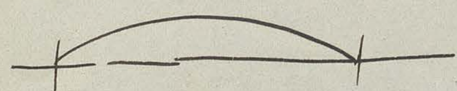
$$x=0,\; x=l \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ \frac{d^2y}{dx^2}=0 \end{array} \right.$$

~~$\frac{M_l}{2} = \varrho\left[\frac{l^2}{6} - \frac{2}{\alpha^2}\right]$~~

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \varrho l\left(1 - \frac{2}{\alpha l}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\right)$$

więc dopóki $\alpha l < \pi$ zawsze ujemne

dla $\alpha l = \pi$ $\frac{dy}{dx} = \pm\infty$



$$y = \varrho\left[lx - x^2 - \frac{2\left[\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right) - \cos\frac{\alpha l}{2}\right]}{\alpha^2\cos\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum a_m \sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{dy}{dx} = \varrho\left[l - 2x + \frac{2\left[\sin\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]}{\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum a_m\frac{m\pi}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varrho\left[-2 + \frac{2\cos\alpha\left(x-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha l}{2}}\right] - \sum a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{l}$$

$$U = \frac{E\theta}{2}\left[\sum -4a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\left[(-1)^m-1\right]\frac{l}{m\pi} - \frac{4a_m\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \cos\frac{\alpha l}{2}}{\cos\frac{\alpha l}{2}}\frac{m\pi}{l}\frac{\left[1-(-1)^k\right]}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right] + \sum\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 a_m^2\frac{l}{2}$$

$$= \frac{E\theta}{2}\left\{4\varrho\sum\left[1-(-1)^m\right]a_m\left[\frac{m\pi}{l} - \frac{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^3}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right] + \frac{l}{2}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\right.$$

$$V = 2P\varrho\left\{ \sum\left[1-(-1)^m\right]\frac{a_m l}{m\pi}\right\}$$

$$W = \frac{P}{2}\left\{\varrho\sum a_m\left[1-(-1)^m\right]\left\{4\left(\frac{l}{m\pi}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right) + \frac{4\frac{m\pi}{l}}{\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}\cdot\frac{\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}{\alpha^2-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}\right\} + \sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\frac{l}{2}\right.$$

$$= \frac{P}{2}\left\{4\varrho\sum a_m\left[1-(-1)^m\right]\underbrace{\left\{\frac{l}{m\pi} + \frac{\frac{m\pi}{l}}{\alpha^2-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}\right\}}_{\frac{\alpha^2\frac{l}{m\pi}}{\alpha^2-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}} + \frac{l}{2}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}$$

$$\frac{P}{E\theta} = \alpha^2$$

$$U = \frac{E\theta}{2}\left\{4\varrho\sum\left[1-(-1)^m\right]a_m\frac{-\alpha^2\frac{m\pi}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2} + \frac{l}{2}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\right\}$$

$$U+V = \frac{P}{2}\left\{4\varrho\sum\left[1-\sim\right]a_m\underbrace{\left[\frac{-\frac{m\pi}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2} + \frac{l}{m\pi}\right]} + \frac{l}{2\alpha^2}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4\right.$$

$$= \frac{m\pi}{l}\left\{\frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2}\right\}$$

$$\frac{-\alpha^2\frac{l}{m\pi}}{\left[\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\alpha^2\right]}\Bigg\} = W - \frac{lP}{4}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$$

niemożliwe ~~wartość~~

$W = W_0 - \frac{lP}{4}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$

Jeśli zaś $\sum .. a_m = W_0$

$U+V = W_0 + \frac{Pl}{4}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi}{\alpha l}\right)^2-1\right]$

~~Jeśli zaś $W=0$~~

$U+V-W = \geqq 0$

$$= \frac{lP}{4}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\left(\frac{m^2\pi^2}{\alpha^2 l^2}-1\right)$$

Stabil. w razie jeśli $\geqq 0$

$$\frac{m\pi}{\alpha l} > 1 \qquad \alpha l \leqq \pi$$

~~t.j. w przypadku ...~~

~~a w razie $W = 0$~~

~~$U+V = \frac{lP}{4}\sum a_m^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$~~

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \leqq \frac{E\theta}{P}$$

$$y = g\left[x^2 + lx - \frac{l}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha(x-\frac{l}{2}) - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} = \frac{\alpha l}{2}$$

$$\underbrace{}_{\cos\alpha x\,\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \sin\alpha x - \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}} \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = \frac{2}{\alpha l}$$

$$y = g\left[lx - x^2 + \frac{2}{\alpha^2}(1-\cos\alpha x) - \frac{l}{\alpha}\sin\alpha x\right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left[\sin\frac{k\pi x}{l} - \frac{k}{k+2}\sin\frac{(k+2)\pi x}{l}\right]$$

} spełnia warunki $y = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Big|_{x=0,\ x=l}$

$$\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{l}{\pi}\int_0^{k\pi}\sin k\varphi\,d\varphi = -\frac{l}{\pi k}(\cos k\pi - 1) = -\frac{l}{\pi k}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$-\frac{k}{k\pi}\int \sin\frac{(k+2)\pi x}{l} \qquad = +\frac{l}{\pi}\,\frac{k}{k+2}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$= -\frac{l}{\pi}\left[(-1)^k - 1\right]\left(1 - \frac{k}{k+2}\right) \qquad \frac{2}{k+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = g\left[l - 2x + l\,\frac{\sin\alpha(x-\frac{l}{2})}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\frac{k\pi}{l}\left[\cos\frac{k\pi x}{l} - \cos\frac{(k+2)\pi x}{l}\right]$$

$$\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\int_0^{k\pi}\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \left[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\right]_0^{k\pi} = \left(\frac{l}{k\pi}\right)^2\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$\int x\cos\frac{(k+2)\pi x}{l}\,dx \qquad = \frac{l^2}{(k+2)^2}\left[(-1)^k - 1\right]$$

$$\int_0^l \sin\alpha(x-\tfrac{l}{2})\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin\left[\alpha(x-\tfrac{l}{2}) + \frac{k\pi x}{l}\right] + \sin\left[\alpha(x-\tfrac{l}{2}) - \frac{k\pi x}{l}\right]\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\left[\alpha(x-\frac{l}{2}) + \frac{k\pi x}{l}\right]}{\alpha + \frac{k\pi}{l}}\Bigg|_l^0 + \frac{\cos\left[\alpha(x-\frac{l}{2}) - \frac{k\pi x}{l}\right]}{\alpha - \frac{k\pi}{l}}\Bigg|_l^0\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(-\frac{\alpha l}{2}) - \cos(\frac{\alpha l}{2} + k\pi)}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} + \frac{\cos(-\frac{\alpha l}{2}) - \cos(\frac{\alpha l}{2} - k\pi)}{\alpha - \frac{k\pi}{l}}\right\} = \frac{\cos\frac{\alpha l}{2}}{2}\left[\frac{1-(-1)^k}{\alpha + \frac{k\pi}{l}} + \frac{1-(-1)^k}{\alpha - \frac{k\pi}{l}}\right]$$

$$= \alpha\cos\frac{\alpha l}{2}\,\frac{1-(-1)^k}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left[-2 + \alpha l\,\frac{\cos\alpha(x-\frac{l}{2})}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sin\frac{k\pi x}{l} - \frac{k(k+2)\pi^2}{l^2}\sin\frac{(k+2)\pi x}{l}\right]$$

$$\int_0^l \cos\alpha(x-\tfrac{l}{2})\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin\left[\frac{k\pi x}{l} + \alpha(x-\tfrac{l}{2})\right] + \sin\left[\frac{k\pi x}{l} - \alpha(x-\tfrac{l}{2})\right]\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos\left[\frac{k\pi x}{l} + \alpha(x-\frac{l}{2})\right]}{\frac{k\pi}{l} + \alpha}\Bigg|_l^0 + \frac{\cos\left[\frac{k\pi x}{l} - \alpha(x-\frac{l}{2})\right]}{\frac{k\pi}{l} - \alpha}\Bigg|_l^0\right\} = \frac{\cos\frac{\alpha l}{2} - \cos(k\pi + \frac{\alpha l}{2})}{\frac{k\pi}{l} + \alpha} + \frac{\cos\frac{\alpha l}{2} - \cos(k\pi - \frac{\alpha l}{2})}{\frac{k\pi}{l} - \alpha}$$

$$\int_0^l x\cos\alpha x\,dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\alpha l}\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

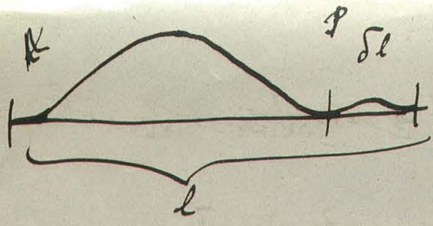
$$= \frac{\cos\frac{\alpha l}{2}}{2}\left\{\frac{1-(-1)^k}{\frac{k\pi}{l} + \alpha} + \frac{1-(-1)^k}{\frac{k\pi}{l} - \alpha}\right\} = \cos\frac{\alpha l}{2}\,\frac{k\pi}{l}\,\frac{1-(-1)^k}{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 - \alpha^2}$$

$$\int \sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{(k+2)\pi x}{l}\,dx = \ldots \Big|_0^l = \ldots$$

$$\frac{k\pi}{l}\left[x\cos\alpha x\cos\frac{\alpha l}{2} + x\sin\alpha x\sin\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$\frac{k\pi}{\alpha^2 l}\left[\ldots\cos\frac{\alpha l}{2}\cdot\left[\alpha l\sin\alpha l + \cos\alpha l - 1\right] + \sin\frac{\alpha l}{2}\left[\ldots\right] - \alpha l\cos\alpha l + \sin\alpha l\right] = \alpha l\sin\frac{\alpha l}{2} + \cos\frac{\alpha l}{2} - \ldots \qquad \frac{k\pi}{\alpha}\sin\frac{\alpha l}{2}$$

[illegible]



ς jest miarą wygięcia ↑

gdy się zmieni l o δl to zmieni się także ς (wskutek zmiany P)

~~w punkcie P musi być~~ obie wygięcia muszą mieć to samo ς'

~~[illegible]~~

warunki w punkcie P: $P_1 = P_2$

$W = f_c(\varsigma, l)$

$$\sout{f(\varsigma' l)} \quad f(\varsigma + d\varsigma, l - d\lambda) + f(\varsigma + d\varsigma, d\lambda) = f(\varsigma, l)$$

$$\sout{f(\varsigma, l)} + \frac{\partial f}{\partial \varsigma} d\varsigma - \frac{\partial f}{\partial l} d\lambda + f(\varsigma, d\lambda) = \sout{f}$$

$$d\varsigma = \frac{\frac{\partial f}{\partial l} d\lambda - f(\varsigma d\lambda)}{\frac{\partial f}{\partial \varsigma}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial l} = 4\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} - \frac{\varsigma^2 l^2}{2} - \frac{3\,\varsigma^2 l^2}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \frac{\alpha\,\varsigma^2 l^3 \cos\frac{\alpha l}{2}}{4\sin^3\frac{\alpha l}{2}} - \frac{3\varsigma^2 l}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{3}{4}\frac{\varsigma^2 l^2}{\sin^2\frac{\alpha l}{2}}$$

$$\frac{f(\varsigma\, d\lambda)}{d\lambda} = 4\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} - \frac{3}{2}\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} = \frac{\varsigma^2}{\alpha^2}$$

$$d\varsigma = \frac{3\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} - \frac{\varsigma^2 l^2}{2} - 3\frac{\varsigma^2 l}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{\alpha\,\varsigma^2 l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}}{2\varsigma\left[4\frac{l}{\alpha^2} - \frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{3l^2}{2\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]}$$

$$F = -6\frac{l\varsigma^2}{\alpha^2} + \frac{\varsigma^2 l^3}{3} + \frac{\varsigma^2 l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \frac{5}{2}\frac{l^2\varsigma^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}$$

$$(U+V)_{\substack{l-d\lambda \\ \varsigma+d\varsigma}} + (U+V)_{\substack{d\lambda \\ \varsigma}} - (U+V)_{\substack{l \\ \varsigma}} \geq 0$$

$$\frac{F(\varsigma, d\lambda)}{d\lambda} = -6\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} - 5\frac{\varsigma^2}{\alpha^2} = -11\frac{\varsigma^2}{\alpha^2}$$

$$F(l) - d\lambda\frac{\partial F}{\partial l} + d\varsigma\frac{\partial F}{\partial \varsigma} + F(\varsigma, d\lambda) - F(l\varsigma) \geq 0$$

$$\left[-d\lambda\frac{\partial F}{\partial l} + F(\varsigma, d\lambda)\right]\frac{\partial f}{\partial \varsigma} + \frac{\partial F}{\partial \varsigma}\left[\frac{\partial f}{\partial l} d\lambda - f(\varsigma, d\lambda)\right] \geq 0$$

$$d\lambda\left[\frac{\partial F}{\partial \varsigma}\frac{\partial f}{\partial l} - \frac{\partial F}{\partial l}\frac{\partial f}{\partial \varsigma}\right] + \frac{\partial f}{\partial \varsigma}\underbrace{F(\varsigma, d\lambda)}_{-11\frac{\varsigma^2}{\alpha^2}d\lambda} - \frac{\partial F}{\partial \varsigma}\underbrace{f(\varsigma d\lambda)}_{\frac{\varsigma^2}{\alpha^2}\cdot d\lambda} \geq 0$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \quad = 0$$

$$-a_1 + 2a_2 - 3a_3 \quad = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_1 = -3a_3$$

$$g\frac{\alpha^2 l^4}{\pi^3} > a_1 + 8a_2 + 27a_3$$

$$> -a_1 + 8a_2 - 27a_3$$

$$g\frac{\alpha^2 l^4}{\pi^3} = 24 a_3$$

$$\left\{ g\left[+8a_3\left(\frac{l}{3\pi} + \frac{3\pi}{\alpha^2 l}\right)\right] + \frac{l}{2}\left\{a_1^2\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \ldots\right] + \ldots + 9^2\left[\left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 - \ldots\right]\right\} > 0\right.$$

$$8g\left(\frac{l}{3\pi} + \frac{3\pi}{\alpha^2 l}\right) + \frac{l a_3}{2}\left\{\left(\frac{3\pi}{l}\right)^4 - \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2 + 9\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]\right\}$$

$$90\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - 18\frac{\pi^2}{l^2} > 0$$

$$\left|8\left(\frac{l}{3\pi} + \frac{3\pi}{\alpha^2 l}\right)\right| > \left|\frac{l}{2}\,\frac{\alpha^2 l^4}{24\pi^3}\left[45\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - 9\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\right]\right|$$

$$= \frac{1}{24}\left[45\frac{\pi l}{} - 9\frac{\alpha^2 l^3}{\pi}\right]$$

$$\frac{64}{\pi^2}\left[1 + \frac{9\pi}{(\alpha l)^2}\right] > 45\left[1 - \frac{\alpha^2 l^2}{5\pi^2}\right]$$

$$1 + \frac{9\pi}{(\alpha l)^2} > 7\left[1 - \frac{\alpha^2 l^2}{5\pi^2}\right]$$

$$\alpha l \neq \pi\sqrt{5}$$

$$\neq 2\pi$$

$$\frac{U+V}{g^2} = \frac{P}{2}\Big[-4\frac{l}{\alpha^2} + \frac{l^3}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \frac{l^2}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}$$

$$+\frac{2}{3}l^3 \quad - 8\frac{l}{\alpha^2} \quad + 4\frac{l^2}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\Big]$$

[illegible] $M = \rho g h l$

$$~~-2g\alpha + gl + \rho g h\alpha = \frac{\rho g h l}{E\theta}~~$$

$$g = \frac{\rho g h}{E\theta}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{P}{E\theta}\frac{dy}{dx} + \frac{\rho g h}{E\theta}(x-l) = 0$$

$$\frac{d^3y}{d\xi^3} + \frac{P}{E\theta}\frac{dy}{d\xi} + \frac{\rho g h}{E\theta}\xi = 0$$

$$y = A\sin\Big(\xi\sqrt{\frac{P}{E\theta}}+\varepsilon\Big) + D\xi^2 + C$$

$$\frac{2P}{E\theta}D + \frac{\rho g h}{E\theta} = 0$$

$$D = -\frac{\rho g h}{2P} \qquad y = A\Big[\sin\Big(\xi\sqrt{\frac{P}{E\theta}}+\varepsilon\Big) - \sin\varepsilon\Big] - \overset{g}{\overset{\|}{\frac{\rho g h}{2P}}}\,(\xi^2)^2$$

$$\sin(\alpha l+\varepsilon) - \sin\varepsilon - g\,l^2 = 0$$

$$\underbrace{\int\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}}_{\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{P}{E\theta}\underbrace{\int\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}_{\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \frac{\rho g h}{E\theta}\underbrace{\int x\frac{d^2y}{dx^2}}_{\left[x\frac{dy}{dx} - y\right]\Big|_0^l} = \frac{M}{E\theta}\frac{dy}{dx}\Big|_0^l$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \alpha^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4g\left[x\frac{dy}{dx} - y\right] - \frac{M}{E\theta}\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0^2$$

$$\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \alpha^2\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx + 4g\Big\{-2\int_0^l y\,dx\Big\} - \frac{M}{E\theta}\,l = l\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$$

$$y = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^2}{4} - \xi^2 + \frac{l}{\alpha}\,\frac{\cos\alpha\xi - \cos\alpha\frac{l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] \qquad \alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

$$U = \frac{E\Theta}{2}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \qquad V = 2\rho g \int_0^{\frac{l}{2}} y\,dx \qquad W = P\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y\,d\xi = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^3}{8} - \frac{l^3}{3.8} + \frac{l}{\alpha^2}\,\frac{\sin\alpha\frac{l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}} + \frac{l^2}{2\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right] = \frac{\rho g h}{2P}\left[\frac{l^3}{12} + \frac{l^2}{2\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{l}{\alpha^2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho g h}{2P}\left[-2\xi + l\,\frac{\sin\alpha\xi}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] \qquad \frac{l}{4} - l\sin\frac{\alpha l}{2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[4\xi^2 - \frac{4\xi l\sin\alpha\xi}{\sin\frac{\alpha l}{2}} + \frac{l^2\sin^2\alpha\xi}{\sin^2\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$\int\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[\frac{4}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{4l}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\left[-\frac{\xi\cos\alpha\xi}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sin\alpha\xi\right] + \frac{l^2}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}}\left(\xi - \frac{\sin 2\alpha\xi}{2\alpha}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[\frac{l^3}{6} + \frac{2l^2}{\alpha}\,\frac{\cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}} - \frac{4l}{\alpha^2} + \frac{l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{l^2}{2\alpha}\,\frac{\cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[\frac{l^3}{6} + \frac{3l^2}{4\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{4l}{\alpha^2}\right]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g h}{2P}\left[-2 + \frac{\alpha l\cos\alpha\xi}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$\int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx = \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[4\frac{l}{2} - \frac{4\alpha l}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\,\frac{\sin\frac{\alpha l}{2}}{\alpha} + \frac{\alpha^2 l^2}{\sin^2\frac{\alpha l}{2}}\,\frac{\frac{l}{2} + \frac{\sin\alpha l}{2\alpha}}{2}\right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[-2l + \frac{\alpha^2 l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \frac{\alpha l^2}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$P = \alpha^2 E\Theta$$

$$U + V - W = E\Theta\left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[-2l + \frac{\alpha^2 l^3}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}} + \frac{\alpha l^2}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$+ 4\left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2 E\Theta\left[\frac{l^3\alpha^2}{12} - l + \frac{\alpha l^2}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$- E\Theta\left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2\left[\frac{\alpha^2 l^3}{6} - 4l + \frac{3l^2\alpha}{4}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{l^3\alpha^2}{4\sin^2\frac{\alpha l}{2}}\right]$$

$$= \left(\frac{\rho g h}{2P}\right)^2 E\Theta\left\{2l + \frac{\alpha^2 l^3}{6} + \frac{7}{4}l^2\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right\}$$

$$l\left\{2 + \frac{7}{4}\alpha l\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{(\alpha l)^2}{6}\right\}$$

$$\alpha l = z$$

$$F = \frac{7}{4}z\operatorname{ctg}\frac{z}{2} + \frac{z^2}{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{7}{4}\operatorname{ctg}\frac{z}{2} - \frac{7}{8}\frac{z}{\sin^2\frac{z}{2}} + \frac{z}{3} = 0$$

$$\frac{-\cos\frac{z}{2} + \frac{\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}}{\sin\frac{z}{2}} = z\cdot\frac{4}{21} = \frac{z - \sin z}{2\sin^2\frac{z}{2}} = \frac{z - \sin z}{1 - \cos z}$$

$$\frac{4}{21}(1 - \cos z) = 1 - \frac{\sin z}{z}$$

$$\frac{4}{21}\frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{6}$$

jeśli $z > 2\pi$

$$\int \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left[\sin(m+1)\frac{\pi x}{l} - \sin(m-1)\frac{\pi x}{l}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\cos(m+1)\frac{\pi x}{l}}{(m+1)\frac{\pi}{l}} + \frac{\cos(m-1)\frac{\pi x}{l}}{(m-1)\frac{\pi}{l}}\right\}_0^l$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(-1)^{m+1} - 1}{m+1} - \frac{(-1)^{m-1} - 1}{m-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^{m-1}\right]\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m-1}\right)$$

$$\left[1 - (-1)^{m-1}\right]\frac{-m}{m^2-1}$$

$$W = \frac{P}{2}\left\{ \frac{g^2 l^3}{3} + \frac{g^2 l^3}{2\sin^2\frac{\alpha l}{2}} - \frac{g^2 l^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{8 g^2 l}{\alpha^2} + \frac{4 g^2 l^2}{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} + \frac{\pi^2}{2l}\sum a_k^2 k^2 + 4 g l \sum a_k + \frac{4 g \pi^2}{l}\sum \frac{a_k k^2}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} \right\}$$

$$U + V - W > (U + V - W)_0$$

$$\frac{E\Theta}{2}\left[\frac{\pi^4}{2l^3}\sum a_k^2 k^4 + \frac{4 g \alpha^2 \pi^2}{l}\sum \frac{a_k k^2}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\right] + 2Plg\sum a_k - 2Pgl\sum a_k$$

$$-\frac{P\pi^2}{4l}\sum a_k^2 k^2 - 2\frac{Pg\pi^2}{l}\sum \frac{a_k k^2}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2} > 0$$

$$\left\{ \frac{\pi^2}{4l}\sum a_k^2 k^2\left[E\Theta\frac{\pi^2 k^2}{l^2} - P\right] + \frac{g\pi^2}{l}\sum \frac{a_k k^2}{\alpha^2 - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}\underbrace{\left[2E\Theta\alpha^2 - 2P\right]}_{=0} \right\} > 0$$

$$E\Theta\,\pi^2 k^2 > P$$

Warunek:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = g\left[-2 + \alpha l \operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right] + \frac{\pi^2}{l^2}\sum a_k k^2 > 0$$

$$\sum\left[a_k^2 k^2\left[E\Theta\frac{\pi^2 k^2}{l^2} - P\right] + \ldots\right] > 0$$

$$\frac{\pi^2}{l^2}\sum a_k k^2 > 2g\left[1 - \frac{\alpha l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$$

$$\frac{4a_k\, gP\, E\Theta}{\left[E\Theta\frac{\pi^2 k^2}{l^2} - P\right]^2} > 0$$

Prócz tej w każdym razie możliwa byłaby taka deformacja przy której wszystkie $a_k = 0$ z wyjątkiem a_2, o ile $\frac{4\pi^2}{l^2}a_2 > 2g\left[1 - \frac{\alpha l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2}\right]$

więc stąd konieczne:

$$\frac{4\pi^2 E\Theta}{l^2} > P$$

$$\left\{a_k - \frac{2PgE\Theta}{[\;\;]}\right\}^2 > \left(\frac{2PgE\Theta}{[\;\;]}\right)^2$$

$$a_k > \frac{2PgE\Theta}{\left[E\Theta\frac{\pi^2 k^2}{l^2} - P\right]^2}$$

dopiero gdy $\frac{\alpha l}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha l}{2} = 1$

w takim razie $\frac{d^2y}{dx^2}$ …

$\alpha = \alpha l$

$-\alpha^2 l = \frac{\pi^2}{l^2} \ldots$

Jedyny warunek: $E\Theta\frac{\pi^2 k^2}{l^2} > P$

$$l^2 < 4\frac{E\Theta\pi^2}{P}$$

Z drugiej strony $y_{\frac{l}{2}} = g\left[\frac{l^2}{4} - \frac{l}{\alpha}\frac{1 - \cos\frac{\alpha l}{2}}{\sin\frac{\alpha l}{2}}\right] = g\left[\frac{l^2}{4} - \frac{l}{\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4}\right] > 0$

Jedyna możliwość stąd wynika

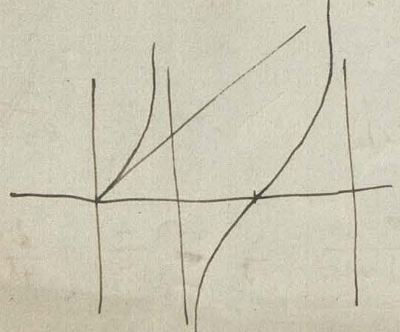
$\frac{l^2 P}{E\Theta} = 4\pi^2$ niemożliwe

$\alpha l = 2\pi$

Wtedy wszystkie …

$$\frac{\alpha l}{4} > \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{4}$$

$$\varphi > \operatorname{tg}\varphi$$



$$\frac{\alpha l}{4} > \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha l > 2\pi$$

$$\alpha^2 l^2 > 4\pi^2$$

$$\frac{Pl^2}{E\Theta} > 4\pi^2$$

sprzeczne!

… —, infolgedessen, …s Gesamtvolumen von der Anordnung ab- (Bose), oder ob dabei spezielle molekulare …räfte ins Spiel treten (Lehmann[1])).

…5. Dagegen läßt sich die Theorie quan- … leicht z. B. für den Fall entwickeln, wo …ußere magnetische Richtkraft h auf Teil- …aus para- oder diamagnetischer Substanz …kt. Sind es z. B. verlängerte Rotations- …de vom Volumen V, Exzentrizität η (als …vorausgesetzt), so suchen sich dieselben …l den magnetischen Kraftlinien einzustellen, …war mit einem Drehungsmoment

$$\frac{4}{5}\pi\eta^2 V\varkappa^2 h^2 \sin\Theta\cos\Theta\,.$$

…olekularbewegungen wirken dieser Parallel- …g entgegen, und nach Formel (4) findet … beispielsweise leicht, daß die relative …gkeit der parallelen und der normalen …ngen (bezogen auf gleiche Körperwinkel) …erhält wie $1 : e^{-\frac{4}{5}\pi\eta^2 V\varkappa^2 h^2 \frac{N}{H\Theta}}$. …tzt man Zahlenwerte ein, so sieht man, …ich durch Wahl geeigneter flüssiger Me- …Eisenchloridlösung), suspendierter Teilchen …Feldstärken leicht alle möglichen Fälle …eren lassen, sowohl fast vollständige Par- …chtung (Sättigung) wie auch ganz unregel- …ge Anordnung.

…iese Erscheinungen ließen sich gewiß leicht …skopisch beobachten und messend ver- …, ein indirekt darauf beruhendes Phänomen …brigens schon seit einiger Zeit bekannt, …ch die Erscheinungen der magnetischen …elbrechung und des magnetischen Dichrois- …), welche an kolloidalen Eisenhydroxyd- …gen (Majorana, Cotton und Mouton) … an in Flüssigkeiten suspendierten Kristall- …ern (Meslin, Chaudier) auftreten; kürz- … haben Zeeman und Hoogenboom die- …n Phänomene an Salmiaknebeln bei Er- …ng eines elektrischen Feldes nachgewiesen. … in diesen Fällen meist eine dem Quadrat …elektrischen bzw. magnetischen Kraft pro- …onale Wirkung gefunden wurde, zeigt, daß … Zustand von vollständiger Parallelrichtung …Kriställchen sehr weit entfernt war. Natür- … hängt ja die ganze moderne, namentlich von …gevin begründete Theorie des Dia- und Para- …netismus, sowie der von Cotton und Mouton …homogenen Flüssigkeiten beobachteten Er- …inungen hiermit zusammen, da ja auch in …elben das Boltzmannsche $e^{-h\chi}$-Gesetz die

… (und ebenso auch der Quarzfaden) wird eine Art Brownscher Bewegung um die Gleichgewichtslage herum ausführen, deren Amplituden innerhalb des Bereichs der mittleren Ablenkung nach den früher erwähnten Formeln für gewöhnliche Brownsche Rotationsbewegung geschätzt werden können. In stark verdünnten Gasen, wo die Reibungswiderstände proportional der Gasdichte sind, wird die Geschwindigkeit der Schwankungen mit Verdünnung zunehmen und kann vielleicht als Maß der Verdünnung dienen. An diese letzten zwei Beispiele ließen sich auch interessante theoretische Spekulationen anknüpfen über die durch Endlichkeit der Wirkungsquanten hervorgebrachten Modifikationen, doch scheint sich derzeit keine Aussicht darzubieten, um denselben eine experimentell direkt greifbare Gestalt zu verleihen.

§ 18. Insoweit haben wir uns ausschließlich mit Schwankungen der Koordinaten eines Systems beschäftigt. In ähnlicher Weise könnte man auch an der Hand der Gleichung (3) die Schwankungen der Energie oder der Geschwindigkeiten der einzelnen Koordinaten untersuchen. Die mittleren Energieschwankungen sind eigentlich unter Umständen ganz beträchtlich, sie entsprechen z. B. für 1 cm³ Wasser einer Verschiebung des Schwerpunktes in der Vertikalrichtung von der Größenordnung eines Millimeters, doch ist ein experimenteller Nachweis derselben angesichts der Ungenauigkeit kalorimetrischer Messungen ganz aussichtslos.

§ 19. Besser steht es mit den Geschwindigkeitsschwankungen. Da die kinetische Energie eine quadratische Funktion der Impulse ist, und da diese im Ausdruck für die Zustandswahrscheinlichkeit mit den Koordinaten gleichberechtigt auftreten, sieht man ohne weiteres, analog wie in (8), daß für die Geschwindigkeit jeder Koordinatenbewegung das Fehlergesetz gilt, und daß ihre mittlere kinetische Energie gleich ist:

$$\frac{1}{2}M\overline{\xi^2} = \frac{1}{2}\frac{H\Theta}{N}\,.$$

Das ist einfach das Maxwellsche Verteilungsgesetz der Molekulargeschwindigkeiten und Äquipartitionsgesetz der Energie.

Durch direkte Beobachtung läßt sich die Geschwindigkeit natürlich nicht messen, obwohl ihre Größe z. B. bei mikroskopisch kleinen Teilchen sonst ganz geeignet wäre, denn sie ändert unaufhörlich ihre Richtung, und man sieht nur die geometrische Resultante der zahlreichen, außerordentlich kurzen mittleren Weglängen: als „Brownsche Bewegung". Wohl aber kann in indirekter Weise die Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle eines sehr verdünnten leuchtenden Gases kontrolliert werden, da sie zufolge des Dopplerschen Prinzips ein genaues Widerbild finden muß in der Intensitätsverteilung im Bereiche einer jeden Spektrallinie.

Bekanntlich hat schon Michelson Messungen der Breite von Spektrallinien ausgeführt,

1) Von Prof. Pockels wurde ich auf eine interessante …erkung Maugains, C. R. [redacted], [redacted], 1912, aufmerksam …acht, wonach sich die zeitliche Veränderung der …warmanordnung bei geeigneter Anordnung durch ein …mmern zu erkennen gibt, welches im magnetischen …e verschwindet.

2) Cotton und Mouton, C. R. 142, 141, 317, 1906; …Meslin, C. R. 136, 888, 930, 1059, 1305, 1438, 1641, …; 13… 182, 1903; J. Chaudier, C. R. 137, 248, 1903; …Zee… u. C. M. Hoogenboom, Versl. Ak. Wet. …sterd… 570, 921, 1911/12; Beibl. 36, 741, 1912.

82/53

I A 13

Coś z teorii sprzężności?

welche man vielleicht kurz: „Dicke der Sedimentationsschichte" nennen könnte.

Selbst wenn ein Teilchen auf irgendeine Weise zum Gefäßboden gebracht und dort losgelassen wird, steigt es im allgemeinen, entgegen der Schwere, eine Strecke von selbst empor, und zwar gemäß der aus (54) für $x_0 = 0$ folgenden Formel:

$$W(x,0,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x+ct)^2}{4Dt}} + \frac{c}{D\sqrt{\pi}} e^{-\frac{cx}{D}} \int_{\frac{x-ct}{2\sqrt{Dt}}}^{\infty} e^{-z^2} dz \qquad (57)$$

deren Werte für wachsende Zeiten t durch die Kurven 1, 2, 3, 4 der Fig. 3 versinnlicht werden:

Der durchschnittliche Arbeitsbetrag, welchen ein solches Teilchen von selbst, also im Widerspruch mit dem II. Hauptsatze, auf Kosten der Umgebungswärme leistet, beträgt also[2])

1) Am einfachsten folgt jene Berechnung schon daraus, daß die Formel (48), unter Einführung jenes c-Wertes, der Gleichung $D\frac{\partial v}{\partial x} + vc = 0$ genügen muß. Vgl. Einsteins Ableitung.

2) Trotzdem ist ein (automatisches) Perpetuum mobile unmöglich. Vgl. M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 13, 1069, 1912; Vorträge üb. kinet. Theorien usw. S. 117 ff.; Bull. Acad. Cracovie 1915 p. 164.

men gleichkörnigen Suspension. für inhomogene Lösungen die Verteilungsformel (48) nicht ohne weiteres anwendbar, und obwohl Perrin auf die Fraktionierung seiner Gummigutt-Lösungen größte Sorgfalt verwendet hat, ist es doch schwer, diesbezügliche Einwände vollständig zu entkräften.

Darum möchte ich eine Modifikation dieser Versuche vorschlagen[1]), welche diese Schwierigkeiten vollständig vermeidet, d. i. die systematische Beobachtung eines einzelnen Teilchens. Würde man die sukzessiven Entfernungen desselben vom Gefäßboden in äquidistanten Zeitintervallen (während langer Zeitstrecken) bestimmen, so würde dieses statistische Material genau der Verteilung einer sedimentierten und zwar gleichkörnigen Suspension entsprechen; andererseits ließe sich an demselben Teilchen, mit Hilfe von (54) oder auch mit Hilfe eigener Versuche mit größeren t, die Fallgeschwindigkeit c ermitteln, so daß man von jeder Unsicherheit in bezug auf Homogenität der

1) Diesbezügliche Versuche sind in Vorbereitung.

Drut rozciągnięty

~~Teoria~~

Istnieje

1). ciągnienie S = bardzo przybliżenie = p w każdym przekroju (jeżeli się zaniedbuje składowy wzdłuż drutu) i przedłużenie)

2). ~~A~~ S w skutek sztywności (co tutaj będziemy zaniedbywać) ~~p~~

Z ciągnienia S przypada $S\frac{dy}{dx}$ ~~+~~ $p\frac{dy}{dx}$ w kierunek Y

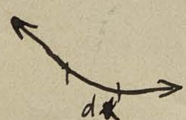
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho Y + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

[Gdyby się ρY nie zaniedbało:

$$p\frac{d^2y}{dx^2} = -\rho q g$$

$$y = -\frac{\rho g q x^2}{2} + .$$

Także bezpośrednio z



$$\rho q\, dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (S' - S) = p\left(\frac{dy'}{dx} - \frac{dy}{dx}\right) = p\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx$$

Tutaj w takim razie sprężystość więc nie wchodzi w rachubę, ale przygotowanie dla dalszych zadań. Wraz:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad a^2 = \frac{p}{\rho q}$$

$$y = \text{~~sin~~}\ A\sin\alpha t\sin\beta x + B\cos\alpha t\cos\beta x$$

$$\alpha^2 = a^2\beta^2 \qquad \alpha = a\beta$$

$$y = A\sin a\beta t\sin\beta x + \text{~~B cos aβt cos βx~~} = 0 \text{ jeżeli końce w spoczynku}$$

$m u = \Delta p l$

$a\Delta = l$

$m\frac{d^2y_k}{dt^2} = \frac{S}{a}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})$

$\frac{d^2y_k}{dt^2} = \frac{S}{\rho a^2}$

$= \frac{S}{\rho}\frac{\frac{y_{k+1}-y_k}{a} - \frac{y_k - y_{k-1}}{a}}{a} = \frac{S}{\rho}\frac{d^2y}{dx^2}$

(w razie jeżeli y_{k+1}, y_k małe względem a)

34

~~$\eta = 0$ $x = 0$ $x = l$~~

~~$\beta l = n\pi$~~

~~$\beta = \frac{n\pi}{l}$~~

~~$\eta = A \sin \frac{a n\pi t}{l} \sin$~~

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\eta = (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t)(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$$

$$\eta = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = l \end{cases} \quad 0 < t < \infty \qquad M = 0$$

$$\beta = \frac{m\pi}{l}$$

Superpozycja drgań [ponieważ równanie różniczkowe cząstkowe pierwszego ~~[illegible]~~ i stopnia, liniowe]

$$\eta = \sum \left[A \cos \frac{am\pi t}{l} + B \sin \frac{am\pi t}{l} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \qquad \frac{am\pi\tau}{l} = 2\pi$$

$$\tau = \frac{2l}{am}$$

~~[illegible]~~

A, B muszą być dane za pomocą warunków początkowych

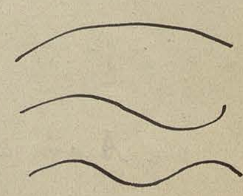
n. p. $\eta = 0 \quad \} t = 0 \qquad A = 0$

$\frac{dy}{dt} = C \sin \frac{\pi x}{l}$

$$\eta = C \sin \frac{a\pi t}{l} \sin \frac{\pi x}{l} \qquad \sin \frac{2a\pi t}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \quad \text{etc.}$$

$$\tau = \frac{2l}{a} \quad = \frac{2l}{\sqrt{\frac{P}{\rho q}}} \qquad \tau = \frac{2l}{a}$$

$n = \frac{a}{2l}, \frac{2a}{2l}, \frac{3a}{2l}$ etc. harmoniczne tony



$$n = \frac{\sqrt{\frac{P}{q\rho}}}{2l}$$

~~Inne rozwiązanie:~~

~~$\eta = f(x \pm at)$~~

~~$= \varphi(x+at) + \psi(x-at)$~~

Jeśli warunki:

$$t=0 \begin{cases} \eta = \varphi(x) \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \psi(x) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum A_m \sin \dfrac{m\pi x}{l} = \varphi(x) \\ \dfrac{m\pi a}{l} \sum B_m \sin \dfrac{m\pi x}{l} = \psi(x) \end{array}\right\}$$

Szeregi Fouriera

? Czy w ogóle można dowolną funkcję φ określić w ten sposób

Tutaj przyjmujemy jako pewne (założenie) że można φ rozwinąć.

$$A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + A_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots A_m \sin \frac{m\pi x}{l} + A_n \sin \frac{n\pi x}{l} + \dots = \varphi(x)$$

$$2\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int \left[\cos \frac{(m+n)\pi x}{l} - \cos \frac{(m-n)\pi x}{l}\right] dx$$

$$= \frac{l}{(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{l} - \frac{l}{(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{l} \Big|_0^l = 0 \text{ jeśli } m \gtrless n$$

$$2\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = l - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l} \Big|_0^l$$

$= l$ co także z tamtego wzoru wypływa dla granicy

więc

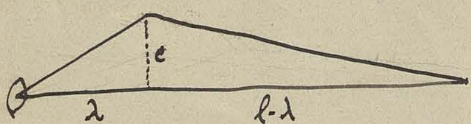
$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$B_m = \frac{2}{l} \cdot \frac{l}{m\pi a} \int \quad = \frac{2}{m\pi a} \int \psi(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

Więc rozwiązanie:

$$y = \frac{2}{l} \sum \left[\cos \frac{a m \pi t}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx + \frac{l}{m\pi a} \sin \frac{a m \pi t}{l} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx \right]$$

N. p. Ton utworzony przez szarpanie



$$\psi(x) = 0$$

$$y = \varphi(x) = \frac{c}{\lambda} x \quad \Big|_0^\lambda$$

$$c\,\frac{l-x}{l-\lambda} \quad \Big|_\lambda^l$$

$$\int_0^l \varphi(x) \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx = \int_0^\lambda \frac{c}{\lambda} x \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx + \int_\lambda^l c\,\frac{l-x}{l-\lambda} \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx$$

~~$\int x \sin \alpha x \, dx =$~~

$$\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}(x \cos \alpha x) = \frac{1}{\alpha}\cos\alpha x - x \sin \alpha x$$

$$\int x \sin \alpha x\, dx = \int \frac{1}{\alpha}\left[\cos \alpha x - \frac{d}{dx}(x \cos \alpha x)\right] dx$$

$$= \frac{\sin \alpha x}{\alpha^2} - \frac{x \cos \alpha x}{\alpha}$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda x \sin \frac{m\pi x}{l}\, dx = \frac{\sin \frac{m\pi\lambda}{l}}{\lambda \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} - \frac{\cos \frac{m\pi\lambda}{l}}{\frac{m\pi}{l}}$$

$$\int_\lambda^l \frac{l-x}{l-\lambda} \sin \frac{m\pi x}{l} = \frac{1}{l-\lambda}\left[(l-x)\frac{\cos \frac{m\pi x}{l}}{\frac{m\pi}{l}} + \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}\right]_\lambda^l$$

$$= - \frac{\cos \frac{m\pi\lambda}{l}}{\frac{m\pi}{l}} - \frac{\sin \frac{m\pi\lambda}{l}}{(l-\lambda)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}$$

$$\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{m\pi x}{l}\,dx = c\,\frac{\sin\frac{m\pi\lambda}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{l-\lambda}\right]$$

Helmholtz: 1/7 odległości; Młotek; Wüllner p. 736

		tępy	miękki 3/7	twardy 3/14	zupełnie twardy 0 ← czas trwania uderzenia / T
c	1	100	100	100	100
c	2	81	100	250	325
g	3	56	9	243	505
c	4	32	2	119	505
e	5	13	1	26	325
g	6	3	0·01	1	100
	7	0	0	0	0

$$\eta = [\text{skreślone}] \sum \cos\frac{a m\pi t}{l}\;\frac{2c\,l^2 \sin\frac{m\pi\lambda}{l}}{m^2\pi^2\,\lambda(l-\lambda)}$$

~~więc jeśli n.p. ...~~ więc zero będą te tony dla których

$$m \cdot \frac{\lambda}{l} = 1, 2, 3 \ldots$$

n.p. jeśli $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2}$ to odpadnie drugi, czwarty etc....

$\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{7}$ siódmy (nieharmoniczny) ton etc.

c 1, d 8/9, e 4/5, f 3/4, g 2/3, a 3/5, h 8/15, c 1/2

Naturalnie ponieważ one tam musiałyby mieć węzły a nie grzbiety.

Inne rozwiązanie

$$\eta = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

Przyczem obie funkcye zadość uczynić muszą warunkom

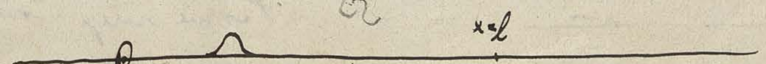
$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ x=l \end{array}\right\}\ \eta = 0$ $\qquad t=0 \left\{\begin{array}{l} \eta = \varphi(x) \\ \frac{d\eta}{dt} = \psi(x) \end{array}\right.$ $\qquad \eta = \int \psi(x)\,dx$

Co do stałych:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int\psi(x) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} f_1(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \frac{1}{a}\int\psi(x)\right] \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \frac{1}{a}\int\psi(x)\right] \end{array}$$

więc: $\eta(t) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \frac{1}{a}\left[\int\psi(x+at) + \int\psi(x-at)\right]\right\}$

Co to znaczy? N.p.



Dajmy na to że $\varphi = 0$

a $\varphi(z) = 0$ z wyjątkiem dla $z = \varepsilon$

Wtedy $\varphi(x+at) = 0$ tylko w punkcie $x + at = \varepsilon$

więc $x = \varepsilon - at$ $\quad \varphi \lessgtr 0$

$\varphi(x-at) = 0$ " " $x - at = \varepsilon$

więc $x = \varepsilon + at$ $\quad \varphi \lessgtr 0$

Więc początkowe wychylenie rozłoży się w dwa geometrycznie takie same, ale o połowę zmniejszone, które z prędkością <u>a</u> będą wędrowały w przeciwnych kierunkach. Przykład ruchu falistego postępującego; a = prędkość = $\sqrt{\frac{k}{\rho q}}$

Co jednak nastąpi jeśli $x + at > l$ albo $x - at < 0$?

Dla wszystkich argumentów φ już nie jest więcej określone, więc przez co one się znaczą? Jeśli $x \pm at = l$ tzn. że fala owa doszła do końca struny przymocowanej, więc teraz tutaj zachodzą owe drugie warunki graniczne z których ci dotąd nie korzystaliśmy t.j. że $\eta = 0$ $\substack{x=0 \\ l}$

zatem $\varphi(l+at) + \varphi(l-at) = 0$ $\quad \updownarrow > l$

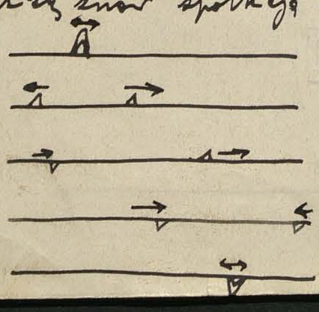
$\varphi(at) + \varphi(-at) = 0$ } określa φ dla argumentów ujemnych

$\varphi(l+at) = -\varphi(l-at)$

$\varphi(-at) = -\varphi(at)$

to znaczy że obie fale się odwrócą i będą znów wędrowały z tą samą prędkością,

aż się znów spotkają etc.



Czy to rozwiązanie zasadniczo różne od tamtego?

Właśnie szereg Fouriera tworzą połączenie

W gruncie zupełnie to samo; możemy

rozwińmy ~~...~~ nasze rozwiązanie ~~...~~ w ten sposób:

$$F(z) = \sum \left[\sin\frac{m\pi z}{l}\int_0 F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx + \cos\frac{m\pi z}{l}\int_0 F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx\right]$$

więc $$f_1(x+at) = \sum\left[\sin\frac{m\pi}{l}(x+at)\int_A \varphi_1(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx + \dots\right.$$

$$\sum A\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{a m\pi t}{l} + A\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{a m\pi t}{l} + \dots$$

Wreszcie będzie rozwiązanie ogólne formy $y = \sum\left[A\sin\frac{m\pi x}{l} + B\cos\frac{m\pi x}{l}\right]\left[M\sin\frac{m a t}{\pi} + N\dots\right]$

~~$y = \frac{\alpha l}{\pi}$~~

~~$$F(z) = \frac{1}{\pi}\sum\left[\sin kz\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\sin k\alpha\,d\alpha + \cos kz\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos k\alpha\,d\alpha\right]$$~~

$$= \frac{1}{\pi}\sum \sin kz\int_{-l}^{} f$$

$$F(z) = \frac{2}{l}\sum \sin\frac{m\pi z}{l}\int_0^l F(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{l} \quad = y$$

Ogólnie: $$F(z) = \frac{1}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sin\frac{m\pi z}{l}\int_{-l}^{+l} F(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{l} + \cos\frac{m\pi z}{l}\int_{-l}^{+l} F(\alpha)\cos\frac{m\pi\alpha}{l}\,d\alpha\right]$$

ale ponieważ $\varphi(\alpha) = -\varphi(\alpha)$

więc cos odpadają a pozostają tylko 2 razy

$$\varphi(x+at) = \frac{2}{l}\sum\sin\frac{m\pi(x+at)}{l}\int\varphi(\alpha)\sin\frac{m\pi\alpha}{l}$$

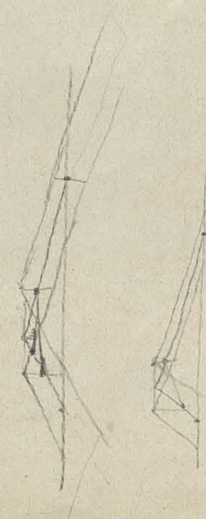
$$\varphi(x-at) = \frac{2}{l}\sum\sin\frac{m\pi(x-at)}{l}\int\dots$$

$$\psi(x+at) = \frac{2}{l}\sum\sin\frac{m\pi(x+at)}{l}\int\psi(\alpha)\sin\dots$$

$$\frac{1}{a}\int \quad d\alpha = \frac{2}{l}\frac{l}{m\pi a}\sum\cos\frac{m\pi(x+at)}{l}\int\dots$$

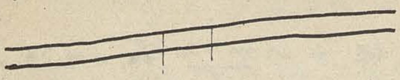
$$= \frac{1}{2}\,\frac{2}{l}\sum\left[\sin\frac{m\pi(x+at)}{l} + \sin\frac{m\pi(x-at)}{l}\right]\int\varphi\,d\alpha\sin\frac{m\pi\alpha}{l} +$$

$$\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi a t}{l}\int\varphi(\alpha) \quad \dots + \frac{l}{m\pi a}$$



Drgania ~~[illegible]~~ podłużne:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}$$



$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \dots$$

$$X_x = E\frac{\partial u}{\partial x} \qquad u = \xi_0 + \xi$$

$$E\frac{\partial \xi_0}{\partial x} = p \qquad X_x = p + E\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ więc niezależne od napięcia i od przekroju

$$= a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

odnosi się do strun i także do walców o przekroju dowolnym

jeżeli temu stali przymocowane przy końcach

Inaczej jednak jeżeli n.p. ~~przymocowane w środku~~ końce wolne:

Wtedy: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$

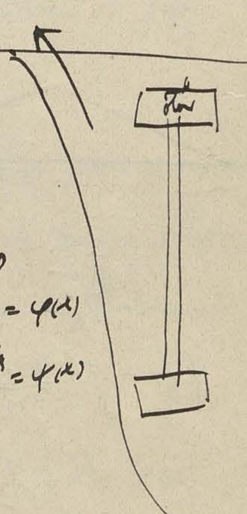
$x = 0 \qquad \xi = 0$

$x = \pm l \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ ponieważ żadne ciśnienie zewnętrzne

$t = 0$

$\xi = \varphi(x)$

$\frac{d\xi}{dt} = \psi(x)$



Teraz ogólne rozwiązanie:

$$\xi = \sum [A \cos a\beta t + B \sin a\beta t][M \cos \beta x + N \sin \beta x]$$

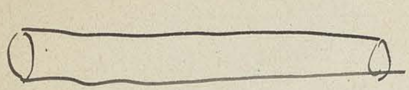
$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \dots \cos \beta x = 0$$

$$\pm \beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$$

więc tylko nieparzyste tony harmoniczne [coś zupełnie analogicznego poznamy później przy piszczałkach]

największe wydłużenia przy końcach

Tak samo względem odkształcenia skrętu:



$$\rho\,\Theta\,dx\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = M^{*}_{x+dx} - M_x \qquad \Big\|\ T = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\frac{E}{T} = 2(1+\mu)$$

$$\mu = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)$$

$$= \frac{\partial (M_x)}{\partial x}\,dx$$

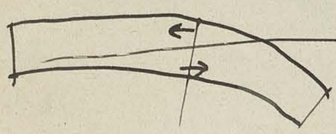
$$M = \Theta\,T\,\frac{\varphi}{l}$$

$$M_x = \Theta\,T\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \qquad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

więc także z takich akustycznych doświadczeń moglibyśmy wyrachować E i T

~~Względem przegięcia pręta więc skrętu (?)~~:



~~Moment $= \frac{\Theta E}{R} = \Theta E \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$~~

Z oporem

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - 2c\,\frac{\partial\eta}{\partial t}$$

$$\eta = \sum_m [\ldots]\,[\sout{M\cos\beta x} + N_m \sin\beta_m x]\, f_m(t)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -a^2\beta^2 f - 2c\,\frac{df}{dt}$$

$$f = e^{\alpha t}$$

$$\alpha^2 = -a^2\beta^2 - 2c\alpha$$

$$\alpha = -c \pm \sqrt{c^2 - a^2\beta^2}$$

$$\eta = \sum_m N_m \sin\beta_m x\; e^{-ct}\, e^{\pm\sqrt{c^2 - a^2\beta_m^2}\,t}$$

Jeśli $c > a\beta$ to ~~...~~ wykładnik $= -$ zatem $e^{-\kappa t}$

$c < a\beta$

$$\eta = \sum_m N_m \sin\beta_m x\; e^{-ct}\left[\cos\left(\sqrt{a^2\beta_m^2 - c^2}\,t\right) \sout{\pm i \sin(\sqrt{\ \ }\,t)}\right]$$

$$n = \frac{\sqrt{\beta_m^2 a^2 - c^2}}{2\pi}$$ więc zawsze mniejsze niż tautochr. (?),

Jeszcze warunki $\left.\begin{matrix} x=0 \\ x=l \end{matrix}\right\}\ \eta = 0$ zatem $\beta_m = \frac{\pi m}{l}$

$$n = \sqrt{\left(\frac{a}{2l}\right)^2 m^2 - \frac{c^2}{4\pi^2}}$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - 2c\frac{\partial\eta}{\partial t}$$ Czy nie ma także rozwiązania analogicznego do d'Alemberta?

$$\eta = e^{-hx} f(x - bt)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = -b\,e^{-hx} f' \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -h\,e^{-hx} f + e^{-hx} f'$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = b^2 e^{-hx} f'' \qquad \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} = h^2 e^{-hx} f - 2h\,e^{-hx} f' + e^{-hx} f''$$

$$b^2 f'' = a^2(h^2 f - 2h f' + f'') + 2c\,b f'$$

~~Jeżeli [illegible]~~

Nie możliwe nie ma żadnego a jeżeli f dowolne

więc prędkość różna dla różnych fal

Np. $f =$ ~~[illegible]~~ $A \sin\beta(x - bt)$

Jeżeli obierzemy $a^2 h = cb$ $\qquad h = \frac{cb}{a^2}$

i jeżeli $-b^2\beta^2 = a^2(h^2 - \beta^2)$ $\qquad -b^2\beta^2 = \frac{c^2b^2}{a^2} - a^2\beta^2$

$$b^2 = \frac{a^2\beta^2}{\beta^2 + \frac{c^2}{a^2}} \qquad b = \frac{a\beta}{\sqrt{\beta^2 + \frac{c^2}{a^2}}}$$

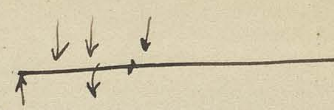
~~$b = a\left(1 - \frac{c}{2a}\right) = a - \frac{c}{D}$~~ $\quad b = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2\beta^2}}} = a\left(1 - \frac{c^2}{2a^2\beta^2}\right)$ = prędkość $\qquad \beta b = \frac{2\pi}{T}$

zatem prędkość tem więcej hamowana

czem mniejsze β więc czem niższy ton

Analogia z rozpraszaniem i absorpcją w optyce

$M_x = Ax - \sum_0^x P_x (x - \mu) = Ax - \int_0^x P_\xi (x - \xi) \, d\xi$



$M_x =$

$\frac{\partial M_x}{\partial x} = A - \int_0^x P_\xi \, d\xi = (T)_x$

$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = - P_x$

$P_x = \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \cdot EK$

Např. $P_x = \text{const}$

$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \frac{P}{EK} \frac{x^4}{4!}$

~~$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$~~

Desky podobně $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) y = \frac{P_x}{E \ldots}$

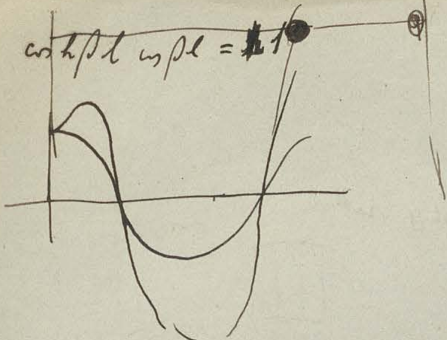
Struna, [illegible] $\frac{d}{dt}$ α.

Szanowny Panie!

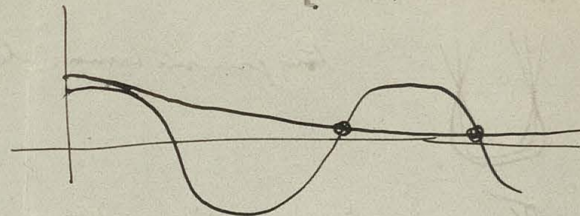
Widzę że WPan się strasznie napracował

$M = \int P_\xi \cdot (x-\xi)\, d\xi$

$\cosh \beta l \cos \beta l = 1$



albo także



$\beta l_1 = \frac{3}{2}\pi + 1^\circ 0' 11''$

$2 = 5\frac{\pi}{2} - 2' 40''$

$3 = 7\frac{\pi}{2} + 7''$

$4 = 9\frac{\pi}{2} - 0' 3''$

$5 = 11\frac{\pi}{2}$

$\sin \alpha t$

$e^{\beta x}$

$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} + \rho q \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

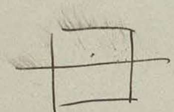
$E\Theta \beta^4 = \rho q \alpha^2$

$T = \frac{2\pi}{\alpha}$

$n = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\beta^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E\Theta}{\rho q}}$

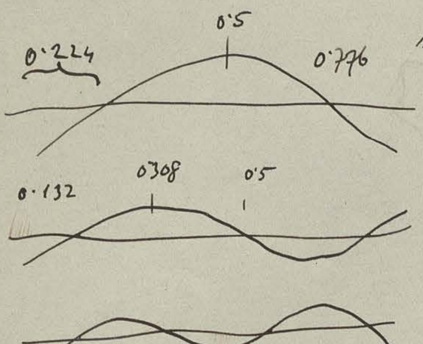
$= \left[(2k+1)\frac{\pi}{2}\right]^2 \frac{1}{2\pi l^2} \sqrt{\cdots}$

$= \frac{(2k+1)^2}{8} \frac{\pi}{l^2} \sqrt{\frac{E\Theta}{\rho q}}$



$\Theta = \frac{a b^3}{12}$

$= \frac{(2k+1)^2 \pi}{8 l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{b^2}{12}} = \cdots \frac{b}{l^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$



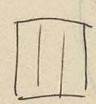
jeśli $y = \frac{dy}{dx}$ także ...

Stefan W...

Widełki strojowe

tony górne nie harmon. ale wyższe niż[?]

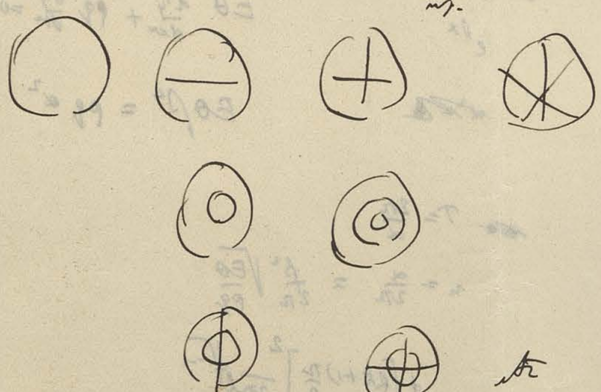
Poisson, Kirchhoff, Rayleigh



Błony $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ $c^2 = \frac{S}{\rho\delta}$

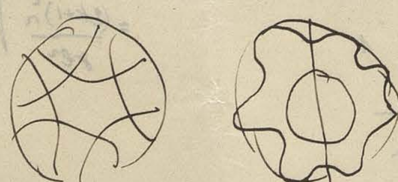
funkcje Bessela

węz.



etc.

Płyty S. Germain, Kirchhoff



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}$$

$x = 0$ $\quad$ $x = l$

$y = 0$ $\quad$ $y = E \sin pt$

$$y = (A \sin pt + B \cos pt)\, f(x)$$

$$-p^2 (A \sin + B \cos) = -a^2 p^2 (A \sin + B \cos) - \gamma p (A \cos - B \sin)$$

$$-p^2 A = -a^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \gamma p B$$

$$-p^2 B = -a^2 \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \gamma p A$$

$$A = a_1 e^{\alpha x} + a_2 e^{-\alpha x}$$

$$B = b_1 e^{\alpha x} + b_2 e^{-\alpha x}$$

$-p^2$

$\alpha = \gamma$

$\alpha^2 \beta M (A \cos\alpha t + B \sin\alpha t) \sin\beta l = A \sin\alpha t$

$$B M \beta a^2 \sin\beta l = A$$

$\sigma = \dfrac{A \sin\alpha t \cos\beta x}{\beta a \sin\beta l}$ będzie największe tam gdzie $\beta x = \frac{\pi}{2}$ t.j.

$+ \sum_k a_n \sin\left(\frac{ak\pi x}{l} + \varepsilon\right) \cos\frac{k\pi x}{l}$

Amplituda będzie $= \infty$ jeżeli $\beta l = 0, \pi \ldots k\pi$

t.j. jeżeli

Z uwzględnieniem tarcia etc.:

$\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} + b\dfrac{\partial\sigma}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}$ $\qquad \sigma = (A \cos\alpha t + B \sin\alpha t)(M \cos\beta x + N \sin\beta x)$

$\alpha^2 [A \cos\alpha t + B \sin\alpha t] + b\alpha [A \sin\alpha t - B \cos\alpha t] = a^2\beta^2 [A \cos\alpha t + B \sin\alpha t]$

$\alpha^2 A - b\alpha B = a^2\beta^2 A$

$\alpha^2 B + b\alpha A = a^2\beta^2 B$

$\dfrac{\alpha A - bB}{\alpha B + bA} = \dfrac{A}{B}$

$b\alpha (A^2 + B^2) = 0$ $\qquad \alpha A$

$A = B$

$$A_1 \sin\alpha_1\left(t-\frac{x}{a}\right) + A_2 \sin(\alpha_1+\varepsilon)\left(t-\frac{x}{a}\right) =$$

$$=\underbrace{\left[A_1 + A_2\cos\varepsilon\left(t-\frac{x}{a}\right)\right]}_{A\cos\delta}\sin\alpha_1\left(t-\frac{x}{a}\right) + \underbrace{A_2 \sin\varepsilon_1\left(t-\frac{x}{a}\right)}_{A\sin\delta}\cos\alpha_1\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

$$= A\sin\left[\alpha_1\left(t-\frac{x}{a}\right)-\delta\right]$$

$$A^2 = A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varepsilon\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{A_2\sin\varepsilon_1\left(t-\frac{x}{a}\right)}{A_1+A_2\cos\varepsilon\left(t-\frac{x}{a}\right)}$$

więc można to uważać jako ton o zmiennej amplitudzie i fazie

periodyczność zmian w A określona przez $\varepsilon = \alpha_2-\alpha_1 = 2\pi\nu = 2\pi(n_2-n_1)$

więc jeśli n. p. $n_2 = n_1+1$ to 1 dudnienie na sek.

Resonancya piszczałki, przy której dno odbywa ruch harmoniczny

(Fale Kundta)

$x=0$ | $x=l$

$u=0 \quad \frac{\partial\sigma}{\partial x}=0$ | $u_l = A\sin\gamma t$

$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_l = \gamma A\cos\gamma t = -a^2\frac{\partial\sigma}{\partial x}$

$$\sigma = (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$$

$$\left.\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(A\cos\alpha t + \dots)\left(-M\sin\beta x + N\cos\beta x\right)\Big|_{x=0} = 0$$

$$a^2\beta M(A\cos\alpha t + B\sin\alpha t)\sin\beta l = A\sin\gamma t$$

$x \cos\lambda +$

$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = \frac{\alpha}{a} \cos\mu \, A \cos(\quad)$

2 rzędy:

$\frac{\alpha'}{a'} \cos\mu' A' \cos(\quad) + \frac{\alpha}{a} \cos\mu A \qquad = 0$

$x\cos\lambda$
$+ y \cos\mu + z \cos\nu = \cos t$

$\cos\mu' = -\cos\mu$

$x\cos\lambda$
$-y\cos\mu + z\cos\nu = \cos t$

$\sigma' = A \cos \alpha\left(t - \frac{x\cos\lambda - y\cos\mu + z\cos\nu}{a}\right)$

w kierunku x z tą samą prędkością

ale w " y z przeciwną t.j. oddalające się

pod kątem $\cos\mu = \cos(-\mu)$

czem większe t, tem większe

$x\cos\lambda - y\cos\mu$

tem większe $-(-x\cos\lambda + y\sin\lambda)$

$x\cos\lambda - y\cos\mu = p$

$[-x(-\cos\lambda) + y(-\sin\lambda)]$

~~$x\cos\lambda - y\cos\mu$~~

$x\cos\lambda - y\sin\lambda$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \lambda\right) = -\cos\lambda$

$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \sigma$

$\frac{\partial^2 \sigma^x}{\partial t^2} = a_1^{x2} \nabla^2 \sigma_1^x$

$x = 0$: $\quad u = u_1^x$

$p = p_1'$

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_1^x}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = a_1^2 \frac{\partial \sigma_1'}{\partial x}$

$p_0 [1 + k\sigma] = p_0^{\neq} [1 + k_1 \sigma_1']$

$k\sigma = k_1' \sigma_1'$

$| \sigma_1$

$\sigma = \sigma' + \sigma''$

$k A' \sin\alpha' \left[t - \frac{y\cos\mu' + z\cos\nu'}{a}\right] + k A'' \sin\alpha'' \left[t - \frac{y\cos\mu'' + z\cos\nu''}{a'}\right] = k_1 A_1 \sin\alpha_1 \left[t - \frac{y\cos\mu_1 + z\cos\nu_1}{a_1}\right]$

powinno dla dowolnych y z t: $\quad \alpha' = \alpha'' = \alpha_1 \quad$ więc wysokość tonu nie zmienia się

$$\frac{\alpha'' \cos\mu'}{a} = \frac{\alpha'' \cos\mu''}{a} = \frac{\alpha_1 \cos\mu_1}{a_1}$$
$$\frac{\cos\nu'}{a} = \frac{\cos\nu''}{a} = \frac{\cos\nu_1}{a_1}$$
$$\cos\mu' = \cos\mu''$$
$$\cos\nu' = \cos\nu''$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu' + \cos^2\nu' = \ldots$$
$$\cos\lambda' = \pm \cos\lambda''$$

$$\cos\lambda + (1-\cos^2\lambda) = \cos^2\lambda_1 + (1-\cos^2\lambda)\frac{a^2}{a_1^2}$$

$$\sin^2\lambda \ldots$$

$$\frac{\cos\mu'}{a} = \frac{\cos\mu_1}{a_1}$$
$$\frac{\cos\nu'}{a} = \frac{\cos\nu_1}{a_1}$$
$$\frac{\sin^2\lambda'}{a^2} = \frac{\sin^2\lambda_1}{a_1^2}$$
$$\frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda_1} = \frac{a}{a_1}$$ załamywanie!

$$kA' + kA'' = k_1 A_1$$

oprócz tego z drugiego warunku

$$a^2 A'\alpha' \frac{\cos\lambda'}{a} \sin\alpha' [\ ] + a^2 A'' \frac{\alpha'' \cos\lambda''}{a} \cos\alpha'' (\ ) = a_1^2 A_1 \frac{\alpha_1 \cos\lambda_1}{a_1} \sin\alpha_1 (\ )$$

$$a A' \cos\lambda' + a A'' \cos\lambda'' = a_1 A_1 \cos\lambda_1$$

$$a(A' - A'')\cos\lambda' = \nearrow \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{\sin\lambda'}{\sin\lambda_1}$$

$$\sin\lambda' \cos\lambda' (A' - A'') = A_1 \cos\lambda_1 \sin\lambda_1$$

N. p. $k = k_1$ (wodór - powietrze)

$$\frac{p_0 k}{\rho_0} : \frac{p_0 k}{\rho_1} = a^2 : a_1^2$$
więc $\rho : \rho_1 = a_1^2 : a^2$

$$(A' - A'')\sin 2\lambda' = A_1 \sin 2\lambda_1$$
$$A' + A'' = A_1$$

$$A' = A_1 \frac{\sin 2\lambda_1 + \sin 2\lambda'}{\sin 2\lambda'}$$

$$\left(\frac{A'}{A''} - 1\right)\sin 2\lambda' = \left(\frac{A'}{A''} + 1\right)\sin 2\lambda_1$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{\sin 2\lambda_1 + \sin 2\lambda'}{\sin 2\lambda_1 - \sin 2\lambda'}$$

$$= \frac{\sin(\lambda+\lambda_1)\cos(\lambda-\lambda_1)}{\sin(\lambda-\lambda_1)\cos(\lambda+\lambda_1)} = \frac{\operatorname{tg}(\lambda+\lambda_1)}{\operatorname{tg}(\lambda-\lambda_1)}$$

(Fresnel II)

Jeżeli $\lambda + \lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ $\quad \lambda_1 = \frac{\pi}{2} - \lambda$

$\sin\lambda_1 = \cos\lambda \quad \operatorname{tg}\lambda = n$

to. cathowite odbicie (refleksja total.)

Jeżeli jednak $k : k_1 = a^2 : a_1^2$

$= \sin^2\lambda : \sin^2\lambda_1$

$$\frac{A''}{A'} = -\frac{\sin(\lambda-\lambda_1)}{\sin(\lambda+\lambda_1)}$$ Fresnel ⊥

$\sum A \sin \alpha\left(t - \frac{x}{a}\right)$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \qquad \sigma = \sum \left[A \cos \alpha t + B \sin \alpha t\right]\left[M \cos \beta x + N \sin \beta x\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\alpha}{a} \sum \qquad \left] \left[-M \sin \beta x + N \cos \beta x\right]\right.$$

$u = \sum \alpha \left[A \cos \alpha \left(t - \frac{x}{a}\right) \ldots \right]\left[M \sin \beta x - N \cos \beta x\right] = a \sum [A \ldots]$

Średnia energja kinetyczna w pewnym punkcie:

$$\frac{\int_0^T u^2\,dt}{T} = \int \left(\alpha_1^2 A_1^2 \cos^2 \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) + \alpha_2^2 A_2^2 \cos^2 \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a}\right) + \cdots \right.$$
$$\left. + 2\alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2 \cos \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) \cos \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a}\right) + \cdots \right) dt$$

$$\int \cos^2 \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) dt = \frac{1}{2} \int \left[1 + \cos 2\alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right)\right] dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2\alpha_1} \sin 2\alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right)\right]$$

$$\int \cos \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) \cos \alpha_2 \left(t - \frac{x}{a}\right) dt = \int \left[\cos (\alpha_1 + \alpha_2)\left(t - \frac{x}{a}\right) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] dt$$

$= \sin \alpha_1 + \alpha \qquad + \sin$

$$2 \lim_{T=\infty} \frac{\int}{T} = \alpha_1^2 A_1^2 + \alpha_2^2 A_2^2 + \ldots$$

$$\frac{\sin^2 2\lambda' + (\sin 2\lambda_1 - \sin 2\lambda')^2}{(\sin 2\lambda_1 + \sin 2\lambda')^2} =$$

$\alpha = 2\pi n$

Więc kinetyczna Energia $\sum$ $= \sum$ kin. Energii

Potencyalna Energia?
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\xi = -\iint a \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt = \frac{a^2}{\alpha^2} \frac{\alpha}{a} \sum \sin \alpha \left(t - \frac{x}{a}\right) = \frac{a}{\alpha} \sum \sin \alpha \left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Potencyalna Energia =

$$\int \frac{d^2\xi}{dt^2}\, d\xi = \alpha^2 \int \xi\, d\xi = \alpha^2 \frac{\overline{\xi^2}}{2} \qquad = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} \text{ więc}$$

przeciętna pot. energia = przeciętna kinet. energia

---

2 drgania równoległe

$$6 = A_1 \sin \alpha_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) + A_2 \sin (\alpha_1 + \varepsilon) \left(t - \frac{x}{a}\right)$$

~~$= A_1 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2)(t - \frac{x}{a}) - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)(t - \frac{x}{a})$~~

~~$A_1 = A \cos \delta$~~

~~$A_2 = A \sin \delta$~~

~~$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$~~

~~$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_1}{A_2}$~~

$A \sin \varphi + B \sin(\varphi + \varepsilon)$

$= \sin \varphi (A + B \cos \varepsilon) + \cos \varphi\, B \sin \varepsilon$

$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \varepsilon$

~~$= (A_1 \sin \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_2 t) \cos \frac{x}{a} -$~~

~~$(A_1 \cos \alpha_1 t + A_2 \cos \alpha_2 t) \sin \frac{x}{a}$~~

~~$= A [(\cos \delta \sin \alpha_1 t + \sin \delta \sin \alpha_2 t) \cos \frac{x}{a} - (\cos \delta \cos \alpha_1 t + \sin \delta \cos \alpha_2 t) \sin \frac{x}{a}]$~~

~~$= A \{\cos \delta [\sin \alpha_1 t \cos \frac{x}{a} - \cos \alpha_1 t \sin \frac{x}{a}] + \sin \delta [\sin \alpha_2 t \cos \frac{x}{a} - \cos \alpha_2 t \sin \frac{x}{a}]\}$~~

~~$\sin(\alpha_1 t - \frac{x}{a})$~~ ~~$\sin(\alpha_2 t - \frac{x}{a})$~~

~~$= A [\cos \delta \sin \alpha_1 (t - \frac{x}{a}) + \sin \delta \sin \alpha_2 (t - \frac{x}{a})]$~~

~~$= -\sin [\delta + \alpha_1 (t - \frac{x}{a})] + \sin [\delta - \alpha_1 (t - \frac{x}{a})] + \cos [\delta - \alpha_2 (t - \frac{x}{a})] - \cos [\delta + \alpha_2 (t - \frac{x}{a})]$~~

$\int \sin \alpha_1 x\, dx$

$a_1 \sin \alpha_1 x + a_2 \sin \alpha_2 x + a_3 \sin \alpha_3 x = 0$

$$2a_1 \int_0^{\frac{\pi}{\alpha_1}} \sin^2 \alpha_1 x\, dx + 2a_2 \int \qquad =$$

$(1 - \cos 2\alpha_1 x)$ $\quad -\cos(\alpha_1 + \alpha_2)x + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)x$

$$= 2a_1 \frac{\pi}{\alpha_1} + \frac{\sin(\pi + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\pi)}{\alpha_1 + \alpha_2} + \frac{\sin(\pi - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\pi)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

byłoby $a_1 \cdot \infty = 0$

jeżeli nie wmawiam

albo $\alpha_2 = \alpha_1$ albo $\alpha_3 = \alpha_1$

i tak samo

Greely Exp. Pol.

θ	−10.9	−25.7	37.8	40.6
	326.1	317.1	309.7	305.6

Witkowski

	0	−78.5	103.5	130	140
p = 1 Atm	1	0.844	0.784	0.721	0.683
70 Atm.	1.301	0.824	0.749	0.598	~~0.444~~

273
78.5
194.5

Stone 331.32

Thiesen 331.92

id. 331.8 $k = 1.405$

Regnault 331.15

Violle Vautier → 330.66

id. 331.9

Blaserna 331.57

$$6 = A \sin \alpha t + B \sin(\alpha + \delta) t = \sin \alpha t (A + B \cos \delta t) + B \cos \alpha t \sin \delta t = C \sin \alpha t$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \delta t$$

Takže vyjádřeno:

Transport Energie = práce prostř. = $\dfrac{A^2 a^2 \rho \lambda}{2} = \dfrac{A^2 \rho_0 k \lambda}{2}$

$$A^2 k \lambda = A'^2 k \lambda + A_1^2 k_1 \lambda_1$$

$$\frac{A^2 - A'^2}{a} k = \frac{A_1^2 k_1}{a_1}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \qquad | \qquad a_1^2$$

$$\sigma = f(x-at) \qquad x=0 \qquad \sigma_1 = f_1(x-at)$$

$x=0$ ~~$\sigma = \sigma_1 + \sigma'$~~

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$u + u' = u_1 \quad \cdots \rightarrow \quad a^2\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'}{\partial x}\right) = a_1^2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$$

$$A \sin(\alpha t - \beta x) + A' \sin(\alpha t + \beta x) = A_1 \sin(\alpha_1 t - \beta_1 x)$$

$$K(A + A') = A_1 K_1 \qquad \alpha = \alpha_1$$

$$A a^2 \beta - A' a^2 \beta' = A_1 a_1^2 \beta_1 \quad \Big\} \quad A a - A' a = A_1 a_1$$

$$\Delta p + \Delta p' = \Delta p_1$$

$$k(\sigma + \sigma') = k_1 \sigma_1$$

$$p = p_0 (1 + k\sigma)$$

tokis dla trungl

cięży punkt

$K = \frac{1}{\text{spółczynnik}}$

$$A_1 = A \left(1 - \frac{a_1 - a}{a_1 - a'}\right) = \frac{a - a'}{a_1 - a'} A$$

$$x = a_1$$

$$A + A' = A_1$$

$$A - A' = A_1 \frac{a_1}{a}$$

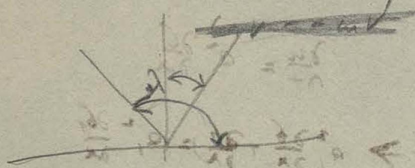
$$A = A_1 \frac{1 + \frac{a_1}{a}}{2}$$

$$A_1 = \frac{2a}{a + a_1}$$

$$A' = \frac{a - a_1}{a + a_1}$$

$$-\frac{\cos\mu}{a} A \cos\left(t - \frac{x\cos\lambda + \ldots z\cos\nu}{a}\right) + \frac{\cos\mu'}{a} A' \sin\alpha\left(t + \frac{x\cos\lambda'}{a}\right)_{x=0} = 0$$

$\cos\lambda = -\cos\lambda'$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \text{[struck out]} - a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

$$\sigma = \frac{r_0}{r} A \sin \alpha \left(t - \frac{r - r_0}{a}\right)$$

$$\frac{dq}{dt} = -a^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = -\frac{r_0}{r^2} A \sin \alpha\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right) - \frac{r_0 \alpha A}{a r} \cos \alpha \left(t - \frac{r - r_0}{a}\right)$$

$$q = -a^2 \int \frac{\partial \sigma}{\partial r}\, dt$$

$$q = a^2 A \left[\underbrace{-\frac{r_0}{\alpha r^2} \cos \alpha\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)}_{\text{znikające małe w odległości}} + \frac{r_0}{a r} \sin \alpha \left(t - \frac{r - r_0}{a}\right)\right]$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$$

$$\int_0^T q^2\, dt = (a^2 A)^2 \left[\underbrace{\frac{r_0^2}{\alpha^2 r^4} \cos^2}_{=\pi} + \underbrace{\frac{2 r_0^2}{\alpha a r^3} \cos \sin}_{=0} + \underbrace{\frac{r_0^2}{a^2 r^2} \sin^2}_{=\pi} \right]$$

$$= (a^2 A)^2 \pi \frac{r_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{\alpha^2 r^2} + \frac{1}{a^2}\right]$$

$$\sigma = A \sin \alpha \left[t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu}{a}\right] \qquad A f\left(t - \frac{\ldots}{\ }\right)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{-\alpha^2 \cos^2 \lambda}{a^2} \sigma \quad \text{etc.} \quad \Big| \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = -\alpha^2 \sigma$$

$\Sigma(\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu) = \text{—}$ Więc jest to rozwiązaniem

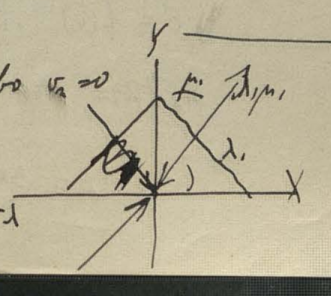
Równą fazę punkty które mają równe $\frac{x \cos \lambda \ldots}{a}$ = płaszczyzny

= fale płaskie $\lambda \mu \nu$ = kierunek promienia

Gdzie natrafi na ścianę stałą tam $\frac{\partial v_n}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \sigma}{\partial n}$ bo $v_n = 0$

N.p. [struck out] $= 90°$ $\sigma = A \sin \alpha \left(t - \frac{x \cos \lambda + y \cos \mu}{a}\right)$

Natrafia na $y = 0$: $\cos \mu = \sin \lambda$



W przestrzeni:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \dots = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_0 \kappa}{\rho_0}\frac{\partial \sigma}{\partial x} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{p_0 \kappa}{\rho_0}\frac{\partial \sigma}{\partial y} \qquad \rho = \rho_0(1+\sigma)$$

$$- - - - \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{p_0 k}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right) = a^2 \nabla^2 \sigma$$

N. p. fale kuliste (np. wychodzące z jednego punktu)

$$\sigma = \text{fc.}(r, t)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{y^2}{r^3}\frac{\partial \sigma}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} =$$

$$\nabla^2 \sigma = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r}\right)$$

$$r\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2\left[r\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + 2\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right] = a^2\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \sigma}{\partial r}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial r}\right] = a^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \sigma\right) = a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\sigma)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\sigma) = a^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\sigma)$$

$$r\sigma = \overset{\text{na zewnątrz}}{\cancel{f_1(r+at)}} + f_2(r-at)$$

$$\sigma = f(t) \quad |_{r=r_0} = A \sin \alpha t$$

$$r_0 A \sin \alpha t = f(r_0 - at) =$$

$$\sigma = \frac{r_0}{r} A \sin \alpha\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)$$

Amplituda prop. $\frac{1}{r}$;

Tony własne ~~...~~ warstwy kulistej

$$r\sigma = (A \sin \alpha t + B \cos \alpha t)(M \cos \beta r + N \sin \beta r)$$

~~$\Delta x\, K \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = M_x - M = K E \frac{\partial\varphi}{\partial x}$~~

?

$$\text{mean} \int_0^T p\, u\, dt = p_0 \int (1 + k\sigma)\, u\, dt = p_0 k \int \sigma u\, dt$$

$$~~\xi\sigma~~ - \int \xi \frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_0 k}{\rho_0} \frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

$$\sigma = A \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$u = A \frac{\alpha}{\beta} \sin(\alpha t - \beta x)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x=l \\ y = E \sin pt \end{matrix}$$

$$y = \sin\beta x\,[A \sin \alpha t + B \cos \alpha t]$$

$$~~\sin pl~~ \; [A_k \sin \alpha_k t + B_k \cos \alpha_k t] \sin\beta l = E \sin pt$$

$$[A \sin pt + ~~B \cos pt~~] \sin\beta l = E \sin pt \qquad p = a\beta$$

$$A = \frac{E}{\sin \beta l} = \frac{E}{\sin \frac{pl}{a}}$$

$$y = \sum [A_k \sin \alpha_k t + B_k \cos \alpha_k t] \sin\beta_k x + \frac{E \sin pt}{\sin \frac{pl}{a}}$$

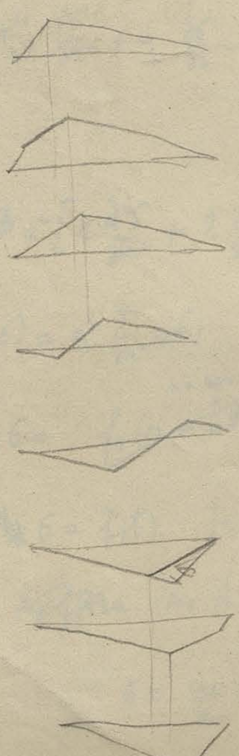
$= \infty$ dla $\frac{pl}{a} = \pi k$

$l = k \frac{\pi a}{p}$

jeśli $\frac{pl}{a} = 0$

to p jest [illegible] 2 [illegible]

Resonans



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y\Big|_{x=0} = 0 \qquad y\Big|_{x=l} = E \sin pt$$

$$y = \sin\beta x\,(A \sin pt + B \cos pt)$$

$$-p^2 = -a^2\beta^2$$

$$-p^2 A = -a^2\beta^2 A + p B \gamma$$

$$-p^2 B = -a^2\beta^2 B - p A \gamma$$

$$\frac{A}{B} = \frac{p\gamma}{a^2\beta^2 - p^2} = \frac{p^2 - a^2\beta^2}{p\gamma}$$

$$-p^2\gamma^2 = (p^2 - a^2\beta^2)^2$$

$$p^4 - p^2(2a^2\beta^2 - \gamma^2) + a^4\beta^4 = 0$$

$$p^2 = a^2\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2} \pm \sqrt{}$$

nschen B...

$$D = \frac{HT}{N} \cdot \frac{1}{6\pi\mu a}.$$

Diese Methode der Ableitung bietet gegenüber mancher anderen den Vorteil, daß man nicht die Gültigkeit der Stokesschen Widerstandsformel für die Brownschen Zickzackbewegungen vorauszusetzen braucht, sondern sich auf die, z. B. von Perrin experimentell nachgewiesene Tatsache stützen kann, daß dieselbe für die Fallbewegung gültig ist[1]).

Im übrigen illustriert dieses Beispiel besonders klar die Unzulänglichkeit des üblichen Entropiebegriffes bei Anwendung auf derartige Erscheinungen. Für ein schweres Teilchen ist natürlich der Gefäßboden die Lage, welche sich durch maximale Entropie des aus dem Teilchen und dem umgebenden Medium bestehenden Systems auszeichnet, und der Thermodynamiker würde erwarten, daß diese Lage von dem durch dissipative Reibungskräfte beeinflußten Teilchen schließlich aufgesucht würde.

In Wirklichkeit zeichnet sich zwar die niedrigste Lage für lange Zeiträume tatsächlich (gemäß 55) durch maximale Wahrscheinlichkeit aus; wegen der einseitigen Begrenzung entspricht dieselbe jedoch durchaus nicht dem durchschnittlichen Aufenthaltsort des Teilchens. Als durchschnittlicher Wert der innerhalb langer Zeiten von dem Teilchen eingenommenen Abstände vom Gefäßboden resultiert aus jener Gleichung die Größe:

$$\bar{x} = \frac{c}{D}\int_0^\infty x\, e^{-\frac{cx}{D}}\, dx = \frac{D}{c} \qquad (56)$$

welche man vielleicht kurz: „Dicke der Sedimentationsschichte" nennen könnte.

Selbst wenn ein Teilchen auf irgendeine Weise zum Gefäßboden gebracht und dort losgelassen wird, steigt es im allgemeinen, entgegen der Schwere ...

... Kolloidteilchen nach Westgrens Me... mittels Zentrifugierens gegen die eine Wand einer Küvette treiben und dann die Verbreitung der Teilchen studieren, sobald die Küvette so aufgestellt ist, daß jene Wand zu unterst liegt.

In anderer Weise sind derartige Erscheinungen häufig verwirklicht worden: bei Versuchen über reversible Kolloide, nach Art des kolloiden Schwefels, bei welchen geringe Elektrolytzusätze oder Temperaturänderungen eine Koagulation bewirk, während die entgegengesetzte Operation das Koagulum in Einzelteilchen auflöst, welche der Schwere entgegen aufsteigen, d. h. „in Lösung" gehen.

Bekanntlich hat Perrin auf die Untersuchung des Sedimentationsgleichgewichts (48) seine genaueste Methode zur Bestimmung der Zahl N gegründet, welche nur die Ausführung zweier relativ einfacher Messungen erfordert: 1. Ermittelung der Höhe x, in welcher eine Abnahme der Zahl der Kolloidteilchen auf $\frac{1}{e}$ erfolgt. 2. Ermittelung des Teilchenradius. Merkwürdig bleibt bei diesen, mit großem experimentellen Geschick ausgeführten Untersuchungen immerhin eine gewisse Divergenz des Schlußresultats $N = 68{,}2 \cdot 10^{22}$, gegenüber dem aus den Millikanschen Messungen folgenden Werte $N = 60{,}6 \cdot 10^{22}$, welch letzterer auch durch andere Erscheinungen (Strahlung, Radioaktivität) gestützt wird.

Wie dieser Widerspruch zu lösen ist, wage ich nicht zu entscheiden, doch möchte ich auf eine Hauptschwierigkeit der Perrinschen Methode hinweisen, die Herstellung einer vollkommen gleichkörnigen Suspension. ~~Auch ist~~ auf inhomogene Lösungen die Verteilungsformel (48) nicht ohne ~~weiteres~~ anwendbar, und obwohl Perrin auf die Fraktionierung seiner Gummigutt-Lösungen größte Sorgfalt verwendet hat, ist es doch schwer, diesbezügliche Einwände ...

Mechanika

i

Hydrodynamika

(zupełne wykłady)

M. v. Smoluchowski (Lemberg), Experimentell nachweisbare, der üblichen Thermodynamik widersprechende Molekularphänomene.

I.

§ 1. Der Titel meines Referates klingt etwas revolutionär, und ich glaube tatsächlich, noch vor zehn Jahren wäre es ein Wagnis gewesen, sich in dieser Versammlung so respektwidrig über die traditionelle Auffassung der Thermodynamik zu äußern. Doch heute haben wir erstens überhaupt weniger Respekt vor Dogmen in der Physik, und zweitens ist in der Wertschätzung der kinetischen Atomistik und der Thermodynamik ein gewaltiger Umschwung eingetreten.

Übrigens handelt es sich uns heute zum Teil um längst bekannte Erscheinungen, wie die im Jahre 1827 entdeckte Brownsche Molekularbewegung, die seit 20 Jahren bekannte Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, die alltägliche Erscheinung des Himmelsblaus usw. Nur das Verständnis derselben auf Grund der kinetischen Theorie ist neueren Datums, und auch hier liegt das Neue und den hergebrachten Anschauungen Widersprechende eigentlich nur darin, daß man mit dem Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz und überhaupt mit der Auffassung der Wärme als Bewegungserscheinung einmal Ernst machte, während man sich früher daran gewöhnt hatte, dies als eine Art poetisches Gleichnis zu betrachten. Heute, da die Ansichten über die ganze Sache sich geklärt haben, mag es an der Zeit sein, eine zusammenfassende Übersicht über diese Erscheinungen zu geben, deren prinzipielle Wichtigkeit darin besteht, daß sie als unzweideutige Experimenta crucis den langwierigen Kampf zwischen kinetischer Theorie und phänomenalistischer Thermodynamik zugunsten der ersteren entscheiden. Dabei werden gleichzeitig noch einige Probleme hervortreten, welche zu weiterer theoretischer und experimenteller Untersuchung einladen.

§ 2. Wir wollen uns von vornherein auf die Betrachtung solcher Zustände beschränken, welche einem thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen, da hier die Widersprüche klar zutage treten. Während nämlich der herkömmlichen thermodynamischen Auffassung zufolge ein abgeschlossenes System einem Gleichgewichtszustand entgegenstrebt, welcher durch die Be-
din[illegible]

§ 3. Wir berufe[n]
statistischen Mechanik
Behauptung, daß die
Gleichgewicht befindl
einer kanonischen Zust
daß also die Wahrsche
durch die Kooordinat
definierten Zustandes
unserem Falle den be
ihn umgebende Tempe
ist durch die Boltzm

$$dW = C e^{-\frac{N}{H\Theta}E} dq_1$$

in welcher E die der
entsprechende Gesamt
man diesen Ausdruck
Ausnahme der (mit
ordinate ε, welche die
vom Normalzustande
die Anzahl der Systen
$\varepsilon + d\varepsilon$ liegen, einen

$$dW = a$$

wo $\chi(\varepsilon)$ die bei Vers
aus dem betrachteten
Gleichgewichtszustand

Darin ist a in
von ε, und nur d[ann]
Koordinate ε so ge
Gesamtenergie E au
druck $\chi(\varepsilon)$ vorkommt
daß die mit Verän
hängende kinetische

Betracht kommenden

mit einem von ε un
darstelle.

In der Praxis k
sehr einfaches Kriteri
Faktors a bzw. über
der Koordinate ε ent
nämlich die auf Ver

hinwirkende Kraft —

aber entgegengesetz
so ist es meist von v
künstlichen „astatis
des ε gleich währs

Ten podział mechaniki właśnie wspomniany odnosi się właściwie tylko do ciał stałych. Do ciał ciekłych i gazowych ~~przedstawiają odmienne~~ nie można go zastosować gdyż określeniem tych ciał jest właśnie że sztywności ich równa się zeru. Ruchy ciał ciekłych i gazowych także można subsumować w ogólną teoryę sprężystości ale rodzaj sprężystości, który u nich napotykamy, różni się wielce od sprężystości ciał stałych, tak że równania zasadnicze przyjmują trochę odmienny kształt i w skutek tego najlepiej oddzielić tę część jako hydromechanikę i aeromechanikę od ~~mechaniki~~ sprężystości ciał stałych.

Właściwie wykład racyonalny systematyczny trzebaby właśc. rozpocząć od teoryi sprężystości ciał stałych i potem z niej przez specyalizacyę dojść do mechaniki płynów, ale ze względów praktyczno-dydaktycznych wolę tutaj inaczej postąpić. Właściwa teorya sprężystości jest stosunkowo trudniejsza i skomplikowana więc wolę rozpocząć najłatwiejszą częścią (nowego przedmiotu) t. j. hydrostatyką (i aerostatyką).

Określenie cieczy i gazów jest takie samo (t.j. że sztywności ich = 0), jedyną różnicę tworzą zjawiska włoskowatości które istnieją wyłącznie w cieczach. Ale pojawiają się one wyłącznie na powierzchni różnych cieczy (– i w ogóle odgrywają dosyć podrzędną rolę jak długo nie chodzi o naczynia bardzo małe etc.) więc wolno ~~więcej~~ oddzielić je zupełnie od reszty mechaniki i t. o nich jako o teoryi włoskowatości jeszcze później raz pomówimy. Jeżeli włoskowatości

~~Jeżeli~~ nie może się objaśnić n.p. jeżeli ciecz lub gaz znajdują się w naczyniu które całkowicie wypełnia, to nie mamy między niemi zasadniczej różnicy

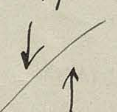
Wszak też wiadomo Panom że można zapomocą zmian odpowiednich temperatury i ciśnienia ciecze i gazy zamieniać w siebie bez przerwy ciągłości. N.p. bezwodnik ~~gazowy~~ węglowy płynny i gazowy w dwuch naczyniach poddamy je ciśnieniu   atmosfer i ogrzejemy do   wtedy są one zupełnie identyczne. Trudność poznania punktu krytycznego.

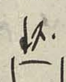
Wspólną cechą więc charakteryzującą ciecze i gazy a odróżniającą je od ciał stałych jest ~~nieograniczona ruchliwość~~ brak sprężystości postaciowej t.j. że poddają one się każdym siłom ~~odkształcającym~~ odkształcającym i tak długo zmieniają kształt jak długo te siły istnieją.

~~Z tego wynika że~~ (nie może w nich istnieć (żadne natężenie styczne (~~jak~~

~~Ciała~~ Jeżeli więc są w spoczynku to

Gdyby istniało natężenie styczne w jakimś bądź kierunku toby nastąpił ruch.

Tak samo  bo takie natężenie możnaby rozłożyć w składowe normalne i styczne.

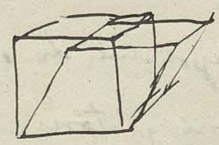
Więc istnieć może tylko natężenie normalne, i to do tego równej wielkości we wszystkich kierunkach n.p. p → 

← p' rozpłynęłoby się gdyby nie działały siły (przeciwne) (równej wielkości p i p' z góry i z dołu etc.

To natężenie nazywamy ciśnieniem. Więc ciśnienie normalne we wszystkich kierunkach takie same — ale naturalnie w każdym punkcie może być inne.
(Twierdzenie Pascala)

W ciałach stałych (i w cieczach poruszających się) rzecz nie ma się tak po prostu

tylko kawałku; jeśli w ten sposób odkształcona

N.p. 

to sprawia natężenia styczne; gdyby się przecięło

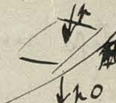
ją tak iżby się umożliwiło ruch to by on następił

w ten sposób ⇄ coś istnieje ...

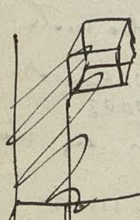
tu też nie możemy używać wyrazu ciśnienia (bo nie jest to wyraz w pewnym punkcie) określony, zależy od położenia płaszczyzny do której odnosimy ciśnienie, i do tego jeszcze kierunek musi być dany (wielkości samej nie wystarczy podanie).

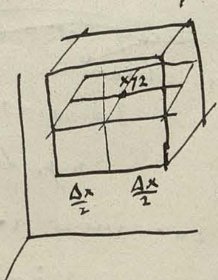
Równania równowagi:

Równowaga nastąpi jeśli sumy sił działających na element objętości w kierunku X Y Z = 0

Mówiliśmy o natężeniu i ciśnieniu etc. bez określenia jeszcze; zupełnie znane pojęcie: siła przypadająca na jedność płaszczyzny n.p. 

N.p. wystawmy sobie element objętości w kształcie prostościanu (kształt własnej objętości)





$$P = p\,\Delta y\,\Delta z$$

$$p = f(x, y, z) = \frac{P}{\Delta y \ldots}$$

$$\Delta y\,\Delta z\left[p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) - p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\right] + \Xi = 0$$

$$p\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = p(x, y, z) - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$p\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) = p(x, y, z) + \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,\frac{\partial p}{\partial x} + \Xi = 0$$

Ξ jest siła zewnętrzna; siły tego rodzaju z jakiemi tu mamy do czynienia

są np. ciężkość, grawitacya etc., które są proporcyonalne do objętości

elementu; zwykle jeszcze odnosi się je do jedności gęstości i oznacza

wtedy przez X, Y, Z

więc ~~[illegible]~~ $\Xi = \rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \,.\, X$ np. ciężkości ~~[illegible]~~ siła ciężkości

$$H = \rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\; g$$

wtedy więc upraszcza się to równanie

Mamy poprostu:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z \quad \text{---} \longrightarrow$$

To ~~[illegible]~~ są równania zasadnicze ~~aerostatyki~~ hydrostatyki i statyki gazów.

Do tego musi jeszcze przyjść równanie wyrażające związek między gęstością

ρ i ciśnieniem p. W tym punkcie ciecze i gazy różnią się naprawdę

nie jakościowo ale ilościowo — o tyle że ciecze (wiele mniej) (zwykle) ściśliwe

niż gazy. ~~[illegible]~~ ~~Objętość pewnej ilości cieczy $v = \frac{m}{\rho}$~~
Na ciecze wystarczy przyjąć zależność

~~$v = v_0$~~ ~~$v_0 = v$~~ $\rho = \rho_0 + \beta p$ β = ściśliwość, bardzo mała

np. dla alk. 0·0001
wody 0·00005 pro atm.
Hg 0·000003

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ To wchodzi już znacznie w rachunki jeżeli się ma

do czynienia np z takiemi ogromnemi ciśnieniami jak na dnie morza

Tam p = 800 atm. więc

ale przy wszystkich zastosowaniach można uważać ciecze w pierwszem

przybliżeniu jako nieściśliwe. To też zwykle w rachunkach hydromechaniki

$X_x = 2T\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right]$ $X_y = T\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)$ 112

uważa się ρ jako niezmienne.

Inaczej w aeromechanice: Tam ściśliwość wiele większa. $k = \frac{2E}{3(1-2\mu)}$ $T = \frac{E}{2(1+\mu)}$

Jeśli temperatura jednostajna w całej przestrzeni to zależność jest dana przez prawo Boyle'a (Mariotte) Charles Gay Lussac $pv = \text{const} = R\theta$

$v = \frac{1}{\rho}$ $\rho = \alpha p$ $\alpha = \frac{1}{R\theta}$ $p = \frac{\text{const}}{\rho^k}$

Wiele więcej skomplikowana rzecz jeśli temperatura nie jest jednakowa. Wtedy ~~te~~ rozważania czysto mechaniczne teorii trzeba jeszcze ~~...~~ uzupełnić rozumowaniami termodynamicznemi. — To lepiej poznamy później na przykładach. ~~Tymczasem ograniczamy się na cieczach nieściśliwych (hydrostatyka)~~

Najważniejszy przykład sił: siły mające potencyał grawitacya etc

Określone tem że $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc

więc $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc.

$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \cdots\right] = -\left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \cdots\right]$

$\frac{dp}{\rho} = -dU$ (w kierunku dowolnym)

z równań: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$

To jednak nie potrzebne jeśli ciecz ściśliwa

Jeśli więc siły nie mają potencyału to wogóle ciecz nie może pozostać w spokoju, musi nastąpić wtedy ruch.

Jeśli poszukamy punktów gdzie $dp = 0$ to będziemy mieli powierzchnie stałego ciśnienia; wtedy także $dU = 0$ zatem powierzchnie stałego ciśnienia są zarazem powierzchniami poziomemi funkcyi potencyalnej sił. Tak samo także powierzchnia rozdzielająca dwie ciecze o różnym ρ, bo: z obu stron takiej powierzchni:

$\frac{1}{\rho_1}dp_s = -dU_s$
$\frac{1}{\rho_2}dp_s = -dU_s$ $\Big\}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right)dp_s = 0$ zatem $dp_s = 0$ więc i $dU_s = 0$ *

zatem powierzchnia odgraniczająca dwie ciecze o różnej gęstości = powierzchnia równego ciśnienia = powierzchnia poziomu

$U = \int \frac{dp}{\rho}$ w każdym razie ważne, tak dla ściśliwych jak nieściśliwych

jeżeli $\rho = f(p)$ [więc równa temperatura!], to $U = \int f(p) = F(p) = \Phi(\rho)$

więc wtedy powierzchnie poziomu są także powierzchniami równej gęstości.

jeżeli [illegible] ogólnie równowaga niemożliwa: prądy konwekcyjne.

Jeżeli ciecz ściśliwa. Warunek aby możliwa równowaga:

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \qquad Z = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \qquad X = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial(\frac{1}{\rho})}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \qquad Y =$$

$$Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + X\left(\quad\right) = 0$$

od $x\,y\,z$ tylko o ile od ρ

Odwrotnie wystarczający warunek także dla gazów aby siły potencjalne bo stały i (izotermicznie albo adiabatycznie)

$U = \int\frac{dp}{\rho} = f(p)$ $\qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

Ciecze: powierzchnia tam gdzie $p = 0$ [albo ciśnienie $p = 1$ atm]

więc naturalnie musi być powierzchnią poziomu

a także z tego że siła musi być ⊥

więc żadna składowa styczna $\frac{dU}{ds} = 0$ w powierzchni

Można ją więc albo z tego warunku wyprowadzić albo z tego że normalna = kierunek siły wypadkowej

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\cdots}} = \frac{X}{\sqrt{\quad}} \text{ etc.}$$

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{X} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{Y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{Z}$$

Ciśnienie więc w każdym punkcie jest pewną oznaczoną wielkością. Jest więc funkcyą punktu, więc (jeżeli używamy n. p. współrzędne prostokątne) funkcyą trzech zmiennych niezależnych $p = f(x, y, z)$

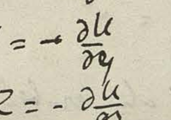
Zeszłego roku w mechanice punktu i. t. d. zwykle mieliśmy do czynienia z funkcyami innego rodzaju. Zwykle mieliśmy tylko funkcye jednej zmiennej niezależnej n. p. prędkości; przyspieszenie etc. $v, w = f_t(t)$ lub siłę $F = f_r(r)$ odległości. To w mechanice punktu. Także potem w mechanice ciał sztywnych: 3 prędkości postępowe środka masy i trzy prędkości obrotowe, także były równe wielkości dla całego ciała sztywnego, więc chodziło nam tylko o zależność ich od czasu, znów tylko 1 zmienna. Jedyną funkcyą trzech zmiennych była funkcya potencyalna $U = f(x, y, z)$ którą określiliśmy tem że miały być siły $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc.

$$Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

Ciśnienie jest znów taką funkcyą, w ogóle więcej teraz z funkcyami tego rodzaju będziemy mieli do czynienia; jest to w ogóle zwykły rodzaj funkcyi w fizyce. Podobnie n. p. gęstość, temperatura. Przy funkcyach tego rodzaju napotykamy na różniczki częściowe (jak powyżej). Ponieważ może s tym przedmiotem nie są całkiem biegli wszyscy Panowie, a więc z tem będziemy mieli do czynienia, więc powtórzę w krótkości najważniejsze zasady.

N. p. jakaś funkcya $\theta = a x^2 y + z$



Łącząc punkta równego ciśnienia otrzymalibyśmy powierzchnie których równaniem byłby $\theta_1 = a x^2 y + z$ etc.

Zostawiając $x\,y\,z$ ~~różnice~~ punkty

θ_1

$$\theta_1 = f(x_1 y_1 z_1) \qquad \theta_2 = f(x_2, y_1 z_1) \;\ldots$$

Spad temperatury w kierunku x = $\Delta\theta = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1} = f(x_2\, y\, z) - \ldots$

$$= \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \qquad \lim = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ tworzy się według zwykłych reguł dla różniczkowania w ten sposób że właśnie x tylko uważa się jako zmienne, a y i z jako stałe N. p.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ Explicite tak: $\dfrac{[(x+\Delta x)^2 y + z] - [x^2 y + z]}{\Delta x} = (2x \ldots + \Delta x^2)y$

~~W ten sam sposób~~ Odwrotnie więc też można napisać:

$$f(x+\Delta x, y, z) = f(x, y, z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon$$

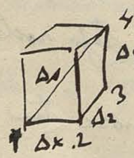
W ten sam sposób: Zmienność (spad) w kierunku y:

~~$f(x\; y + \Delta y$~~ $= \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$ a w kierunku z: $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$

Używa się znaku ∂ aby zrobić uważnym że istnieją i jeszcze inne zmienne.

Spad w kierunku dowolnym znajduje się teraz zapomocą tych trzech pochodnych

N. p.



$$\theta_2 = f(x\,y\,z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x\,y\,z)$$

$$\theta_3 = f(x+\Delta x, y, z) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x, y, z)$$

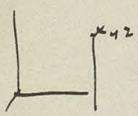
$$\theta_4 = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z} \;-$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f(x\,y\,z) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial f}{\partial z}$$

spad $\dfrac{\partial\theta}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\Delta x}{\Delta s} + \ldots = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \ldots$$

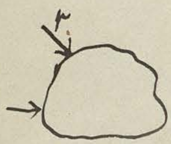
Do tego samego rezultatu prowadzi też:



$$[p(x+\Delta x) - p(x)]\,\Delta y\,\Delta z = -\rho X\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ale właściwie niecałkiem ściśle bo ciśnienia są rozmieszczone nierówno po powierzchni $\Delta x \Delta y$ Δz.

Właściwie ścisły dowód (niezależny od kształtu elementu objętości):

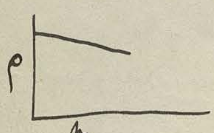


$$\underbrace{\iint p \cos nx \, do}_{=\iiint \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\,dy\,dz} + \iiint \rho X \, dx\,dy\,dz = 0$$

więc ponieważ niezależne od wielkości i kształtu $\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho X$

Przy cieczach właściwie nie znamy związku między ciśnieniem i gęstością

$\rho = f(p)$ ale wiemy że ρ zmienia się bardzo mało z p



więc $\rho = f(0) + \frac{df}{dp} p + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dp^2} p^2 + \dots$

~~= ρ₀ + αp zaniedbać~~

$$= \rho_0 + p\underbrace{\left[\frac{df}{dp} + \frac{1}{2} p \frac{d^2f}{dp^2} + \dots\right]}_{\beta}$$

β = ściśliwość (więc zależy od ciśnienia)

Wpływ temperatury także można zaniedbać bo dobre przemieszanie itd.

I. Ciężkość

$$X = 0 = Z = 0 \qquad Y = +g \qquad U = -gy$$

$$p = \rho g y + \text{const}$$

a jeżeli się uwzględnia ściśliwość:

$$c + gy = \int \frac{dp}{\rho_0 + \beta p} = \frac{1}{\beta} \log(\rho_0 + \beta p)$$

$$\rho_0 + \beta p = A e^{+\beta g y}$$

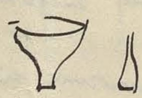
$$A = \rho_0$$

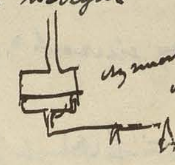
$$p = \frac{1}{\beta} \rho_0 \left[e^{\beta g y} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{\beta} \rho_0 \left[\beta g y + \frac{1}{2} (\beta g y)^2 + \dots \right] = \rho_0 g y \left[1 + \frac{1}{2} \beta g y + \dots \right]$$

więc ciśnienie zależy tylko od poziomu, wcale nie od kształtu naczynia

Paradoxon hydrostatyczne Pascala





Naturalnie ciśnienie także takie samo na ścianę boczną

Jeżeli ściana ruchoma (tłoczek) jaką siłą i w jakim punkcie trzeba by przyłożyć żeby równowaga nastąpiła?

$$P = \iint p \, dy \, dz = \iint g \rho y \, dy \, dz = g \rho c \frac{b^2}{2} = g \rho \frac{b}{2} \cdot c b$$

a w odległości? Moment musi być taki sam więc

$$\iint p y \, dy \, dz = \iint g \rho y^2 \, dy \, dz = g \rho \frac{b^3}{3} c = P \cdot \frac{2}{3} b$$

więc w odległości $\frac{2}{3} b$

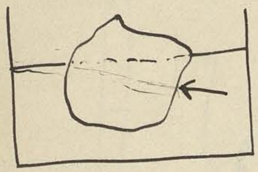
= środek ciśnienia

Np. koryto prostokątne drewniane

ściany podpierać w $\frac{1}{3}$ wysokości

$y \cos - x \sin nx = y \sin \cos ny$ $\int y^2\, dy\, dz\, x - \int yx$ ——

Ciało zanurzone



Składowa ciśnień (do góry) = parcie]

$$P_x = \int p\, \underbrace{d\sigma \cos nx}_{dy\,dz} = \int \rho g y\, dy \overbrace{\int dz}^{=0} = 0$$

$$P_y = \int p\, \underbrace{d\sigma \cos ny}_{dx\,dz} = \rho g \int y\, dx\, dz = \rho g\, Vol$$

Zasada Archimedesa

używa się do oznaczenia ciężaru gatunkowego, areometry etc.

Czy nie powstają momenty?

$$M = \int p\, y\, d\sigma \cos nx = \int \rho g y^2 dy \int_0 dz = 0$$

$$M_z = \int p\, \underbrace{d\sigma \cos ny}_{dx\,dz} \cdot x = \rho g \int y x\, dx\, dz = \rho g \int x\, dx\, dy\, dz$$

Skutek taki jak gdyby siła P była przyłożona w środku masy części zanurzonej

ponieważ równe siły tak samo jak ciężkości tak jak

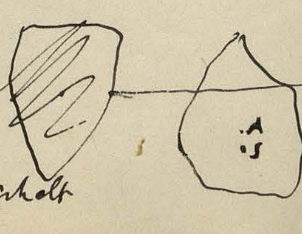
Równie tak jak ubytek ciężkości ciała przy ważeniu cieczy

Równowaga stała jeśli przy małem wychyleniu ciało powraca w dawniejszą pozycyę, wtedy jeśli działają momenty w tym kierunku. Miarą stałości będzie ten moment.

W każdym razie stałość równowaga jest dla tego S poniżej A

co naturalnie tylko możliwe

jeśli ciężar rozmieszczony nierówno



Zawartość Tonnengehalt

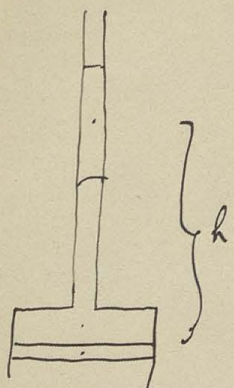
$$F \cdot SM \cdot r-y =$$

$$F \cdot AS \, r-y \pm 2 \tfrac{a}{2} f$$

$$F \cdot SM = F \cdot AS \pm \frac{a f}{r-y}$$

$$= F\left[AS \pm \frac{b^3}{12F}\right]$$

$$\text{Stočení} = G\left[\frac{b^3}{12F} - AS\right]$$



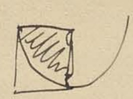
$g \cdot M \cdot \Delta h : g \cdot \varphi \, \Delta h \cdot \not{m} \cdot h = M = \rho \cdot \varphi \cdot h$

dopóki płynne dwie ciśnienia F_1 na dół a także naczynie F_2 do góry

gdy stała tylko [illegible] ciężar f na dół $f = F_1 - F_2$

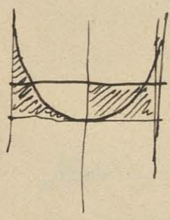
tak jak inne przemieszczenie przy wzroście

$$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$



$$2\pi \int x\, dx\, dy = \frac{\omega^2 \pi}{g} \int x^3\, dx = \frac{\omega^2 \pi}{g} \frac{x^4}{4}$$

$$\frac{\omega^2 \pi}{g} \frac{A^4}{4} + \ldots = A^2 \pi \frac{\omega^2 a^2}{2g}$$

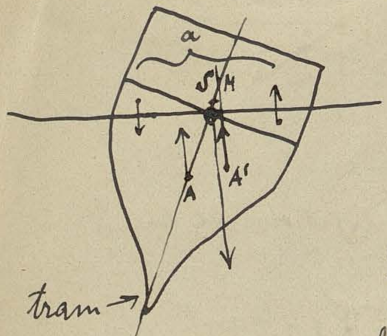


$$a = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} \frac{A^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2}{4g}.$$

Aspirator [illegible]

Siła w punkcie $S = G$, $M = -G$ } więc moment $= F l \rho$ — naczynia połączone



we formie graniastosłupa

$G . SM \sin\varphi$ (dodatnio dla pozycji A)

$K \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -$

F = powierzchnia zanurzona

$F . SM . \sin\varphi = -F AS \sin\varphi + 2\frac{a}{2} f$ (AS dodatnio dla pozycji S)

obłożenie połówkowe metacentrum

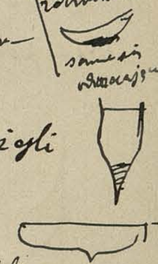
$G\left(-AS \sin\varphi + \frac{af}{F}\right) =$

~~$f = b$~~ $a = \frac{2}{3} b$ (jako trójkąt) $\frac{af}{F} = \frac{b^3}{12F}$.

$f = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \varphi$

$-K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Sigma = G\varphi\left[\frac{b^3}{12F} - AS\right]$

Łodzie rotundowe samo się odwraca



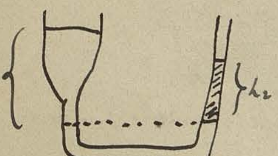
Największej wagi rzeczy przy okrętach, nie tylko dla bezpieczeństwa, ale także tem więcej żagli

Przy angielskich yachtach SA ~~wielkie~~ (mały, nawet ujemne) czem większe Σ tem więcej żagli

przy amerykańskich $\frac{b^3}{F}$. można więcej

w rzeczywistości $F = 2 l b$ ~~$\frac{b^3}{24 l} - AS$~~

Naczynia połączone napełnione dwiema cieczami



powierzchnia graniczna musi być podobnie z poziomem

więc pozioma.

Ciśnienie z jednej strony $h_1\rho_1 g = h_2\rho_2 g$

$h_1 : h_2 = \rho_2 : \rho_1$

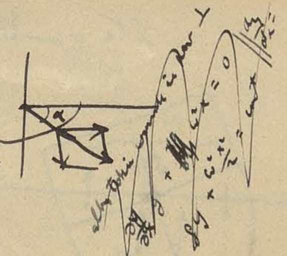
N.p. barometr

spółczynnik rozszerzalności według rtęci Dulong-Petit, Regnault (niezależny od szkła)

Powierzchnia graniczna musi być pozioma! Jeśli pionowa to tylko w kapilarach.

Ciecz pod wpływem ciężkości i siły centryfugalnej

$Y = g \;\|\; X = \frac{v^2\cos\alpha}{R} = \frac{\omega^2 R^2\cos\alpha}{R}\,\frac{x}{R} = \omega^2 x \qquad Z = \omega^2 z$



$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$ więc będzie istniał potencjał

$\omega^2 x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \frac{p}{\rho} = +\frac{\omega^2 x^2}{2} + f_1(y,z)$

$g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \frac{p}{\rho} = +g\,y + \varphi(x,z)$

$\omega^2 z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \qquad \frac{p}{\rho} = +\frac{\omega^2 z^2}{2} + f(x,y)$

to jest dopiero takie U

$\frac{p}{\rho} = +\frac{\omega^2(x^2+z^2)}{2} + g\,y + const$

~~albo takie~~ dopiero $= d\frac{p}{\rho} = \omega^2 x\,dx + \dots$ takie bezpośrednio $= \Sigma U$

więc powierzchnie poziome będą paraboloidy obrotowe koło osi Y

więc także powierzchnia będzie miała ten kształt

Moglibyśmy to także znaleźć w inny sposób:

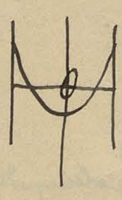
siła ⊥ na styczną

$-\frac{dx}{dy} = \frac{Y}{X} = \frac{g}{\omega^2 x}$ więc $\omega^2 x\,dx + g\,dy = 0$

$\frac{\omega^2 x^2}{2} + g\,y = const$

$0 + g\,y_0 = const$

N.p. weźmiemy jako początek tego dno w stanie spoczynku ciecz miała poziom



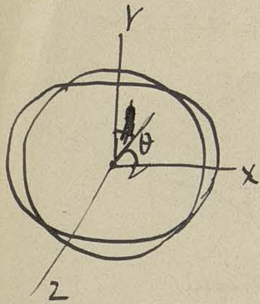
$V_u = \iint 2\pi x\,dx\,dy = 2\pi \int_0^{x=\frac{1}{\omega}\sqrt{2gy_0}} x\,dx\,\frac{g y_0 - \frac{\omega^2 x^2}{2}}{g}$ pokazuje się że równie wysoko podnosi się nad poziom jako poniżej

$= 2\pi\left[y_0\,\frac{g\,y_0}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{2g}\,\frac{4g^2 y_0^2}{4\omega^4}\right] = \pi\,\frac{g\,y_0^2}{\omega^2}$ (dla [illegible])

$V_0 = 2\pi\iint x\,dx\,dy = 2\pi\int_{x=\frac{1}{\omega}\sqrt{2gy_0}}^{a} \dots = 2\pi\left[y_0\frac{a^2}{2} - \frac{\omega^2}{2g}\frac{a^4}{4}\right] - \pi\,\frac{g\,y_0^2}{\omega^2}$

ciecz pod wpływem grawitacji środka (punktu) i siły centryfugalnej w p. ziemia

$$g : \frac{1}{a^2} = F : \frac{1}{r^2}$$



$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{g a^2}{r^2}\frac{x}{r} + \omega^2 x$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g a^2}{r^2}\frac{z}{r} + \omega^2 z$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{g a^2}{r^2}\frac{y}{r}$$

zważając że $-\frac{x}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$ można to całkować jak przedtem

ale wygodniej tak: $-\frac{1}{\rho}dp = dU = dU_1 + dU_2$

$$-\int\frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} = U = U_1 + U_2$$

$U_1 = -\frac{g a^2}{r} + \text{const}$ $\qquad U_2 = -\frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2) + \text{const}$

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1 \qquad r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}$$

$$1-\frac{a}{r} = 1-\frac{1}{1+\delta} = +\delta$$

$$\frac{r^2}{2a^2} = \frac{1+\delta}{\delta}$$

$$-g a\frac{r^2}{2a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi\,\omega^2}{2} = -g a$$

$$r^2 = -\frac{g a}{\ldots}$$

$$\frac{p}{\rho} = +\frac{g a^2}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2) + c$$

Na biegunie p_0, g, a, $x=z=0$

$$\frac{p_0}{\rho} = +g a + c$$

więc równanie powierzchni t. j. gdzie $p = p_0$:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - g a\left(1-\frac{a}{r}\right) + \frac{\omega^2}{2}(x^2+z^2) \quad\Bigg|\quad -g a\left(1-\frac{a}{r}\right) + \frac{\omega^2}{2}\underbrace{(x^2+z^2)}_{r^2\sin^2\theta} = 0 \quad : a^2 g :$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} - \frac{\omega^2}{2ga^2}r^2\cos^2\theta$$

$\frac{\omega^2}{g}$ bardzo małe

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{e^2}{a^2} - \ldots$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{\omega^2}{2ga}r^2\cos^2\theta\right]$$

$$r = a\left[\quad\right]^{-1} = a\left[1+\frac{\omega^2}{2ga}r^2\cos^2\theta\right] = a\left[1+\frac{\omega^2 a}{2g}\cos^2\theta\right]$$

spłaszczenie $= 2e^2$

$$r^2 = \frac{a^2}{\left[1-\frac{\omega^2 a}{2g}\cos^2\theta\right]^2} = \frac{a^2}{1-\frac{\omega^2 a}{g}\cos^2\theta}$$

przedst. się elipsa $= \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\varphi}$

spłaszczenie $\alpha = \dfrac{\text{różnica między osią równikową i biegunową}}{\text{oś biegunowa}}$

tutaj wstawić należy dla ziemi $\omega = \dfrac{2\pi}{24.60.60}$ $g = 980$ $a = 6,336,000$

otrzymuje się $\alpha = \dfrac{1}{582}$

Tymczasem w rzeczywistości jest ono 2 razy tak wielkie (koło $\frac{1}{290} - \frac{1}{300}$)

Polega na tem że przyciąganie nie jest skierowane do środka ziemi.

Sławne zadanie: znalezienie figury równowagi cieczy obracającej się i przyciągającej się prawem Newtona. Wymaga znajomości potencjału

Mac Laurin (1742), Clairaut: możliwe formy: 2 elipsoidy ~~ob~~ obrotowe
jedna mało spłaszczona, drugi bardzo wiele ale tylko aż
do pewnej granicznej prędkości obrotowej; jeżeli większa to niemożliwe
oprócz tego 3osiowa elipsoida Jacobi (ale tylko dla mniejszych prędkości)
Wreszcie według Matthiesena jeszcze dwa walce, ale tylko aż do pewnej
prędkości obrotowej – Jeżeli większa oddzielenie?
Obręcze (Saturn) nie mogą być kształtami równowagi jak Maxwell pokazał
więc muszą się składać z mnóstwa małych cząsteczek.

Poincaré, Darwin!
gruszkowate figury

Gas izotermiczny pod wpływem ciężkości

$$\frac{p}{\rho} = R\theta \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -g \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{R\theta}{p}$$

$$U = gy \qquad \int \frac{1}{\rho}\, dp = -U$$

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{g}{R\theta}$$

$$\log p = -\frac{gy}{R\theta} + \text{const}$$

$$p = p_0\, e^{-\frac{gy}{R\theta}}$$

$$y = \frac{R\theta}{g}\left[\log p_0 - \log p\right]$$

$$^{10}\log x = {}^{10}\log e \cdot {}^{e}\log x$$

$$\frac{R}{g} = \frac{980 \cdot 76 \cdot 13{\cdot}6}{0{\cdot}0013 \cdot 980} = \frac{1000}{0{\cdot}0013} \qquad {}^{e}\log x = \frac{^{10}\log x}{^{10}\log e}$$

$$\frac{1}{^{10}\log e} = {}^{e}\log 10 = 2{\cdot}30585$$

$$y = \underbrace{\frac{2305{\cdot}85}{0{\cdot}00129}}_{1840000}\left[{}^{10}\log \frac{p_0}{p}\right] = 18400\; {}^{10}\log \frac{p_0}{p}$$

w metrach

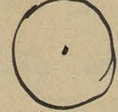
18400	76
15000	b = 124
7500	307
4800	428
3000	529
2000	598
1000	674
0	760

Tutaj przyjęliśmy temperaturę jako stałą w rzeczywistości zmniejsza się ona z wysokością więc θ inne uwzględnia się to przybliżenie w ten sposób że pomnoży się tamten rezultat przez $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2 \cdot 273}$ i potem jeszcze kilka mniejszych korektur: wilgoć, zmienność ciężkości z powodu wysokości i geogr. szerokości etc.

w małych wysokościach 1 mm = 10 m

- barometry rtęciowe
- aneroidy
- oznaczenie temperatury wrzenia

Pod wpływem grawitacji do punktu P



$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{a^2 x}{r^3} \text{ etc.}$$

prościej: $\int \frac{dp}{\rho} = U = g\frac{a^2}{r} + \text{const} = \int \frac{dp}{p}\cdot R\theta = R\theta \log p$

$$+ga + \text{const} = R\theta \log p_0$$

$$ga\left(1-\frac{a}{r}\right) = R\theta \log\frac{p_0}{p}$$

$$p = p_0\, e^{-\frac{ga}{R\theta}\left[1-\frac{a}{r}\right]}$$

dla r mało się od a różniących musi to nam dać naturalnie znów dopiero wzór:

$r = a+y \qquad \left[1-\frac{a}{r}\right] = \frac{r-a}{r} = \frac{y}{r} = \frac{y}{a}$

$$p = p_0\, e^{-\frac{gy}{R\theta}}$$

Tutaj: gęstość dla $r=\infty$ wielkość skończona $p = p_0 10^{-346}$

Atmosfera nasza?

Nie jest izotermiczna; zatem $\begin{cases} \frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \left[\frac{\rho}{\rho_0}\right]^{k-1} \\ \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k = \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\frac{k}{k-1}} \end{cases} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}$

$$\int\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho_0}\int\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0}\int p^{-\frac{1}{k}}dp = \frac{p_0^{\frac{1}{k}}}{\rho_0}\frac{p^{-\frac{1}{k}+1}}{-\frac{1}{k}+1} = \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{p}{\rho_0}\cdot\frac{k}{k-1}$$

$$= g\frac{a^2}{r})$$

$$\frac{p_0}{\rho_0}\frac{k}{k-1} = +ga + \text{const}$$

$\theta R\rho = p$

$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -g$

$\frac{d\theta}{\theta_0} = \ldots = \frac{k-1}{k}\frac{dp}{p_0}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{k}} = -\frac{k-1}{k}\frac{g\rho_0}{p_0}dy$

$d\theta = -\frac{k-1}{k}\frac{g}{R}dy$

$$\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{p}{\rho_0} - \frac{p_0}{\rho_0}\right] = -\frac{k-1}{k}ga\left[1-\frac{a}{r}\right]$$

$$\left[1-\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{k}}\frac{p}{p_0}\right] = \frac{k-1}{k}ga\left[1-\frac{a}{r}\right]\frac{\rho_0}{p_0} = \left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\frac{1}{k}}\right] = \left[1-\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right]$$

Pokazuje się że p byłoby już = 0 we wysokości 27 km.; naturalnie możliwe; błąd że nie jest to proces adiabatyczny

kinetyka

Hydrodynamika cieczy doskonałych t.j. bez tarcia: ciśnienie w każdym punkcie równe we wszystkich kierunkach (normalne do p.)

Z równań sprężystości zapomocą specyalizacyi albo też bezpośrednio:

$$\rho\, dx\, dy\, dz\, \frac{du}{dt} = \rho X\, dx\, dy\, dz - \frac{\partial p}{\partial x} \ldots$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}\right.$$

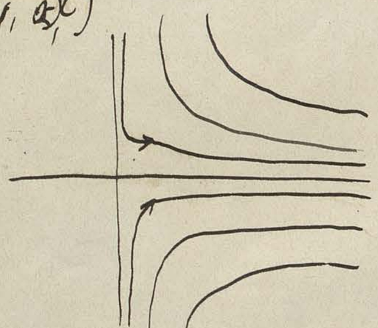
Tutaj znaczy u prędkość pewnego (indywidualnego) elementu cieczy, a $\frac{du}{dt}$ = zmienność tej prędkości podczas czasu na drodze

Więc to przedstawienie że znamy $\left.\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right\} = f(x_0, y_0, z_0, t)$ zatem $u = \frac{dx}{dt}$ etc...

Można jednak i uważać u jako dane względem punktu stałego w przestrzeni

$u = f(x, y, z, t)$

N.p.



$u = \varphi(x\, y\, z\, t)$

$v = \psi(x\, y\, z\, t)$

Jeśli utworzę teraz $\frac{\partial u}{\partial t}$ to to znaczy zmianę podczas gdy tylko czas się zmienia, a nasze współrzędne stałe zatem zmienność w pewnym punkcie, co jest coś innego niż stanowisko $\frac{du}{dt}$, n.p. jeśli ruch stały to $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ podczas gdy $\frac{du}{dt} \gtrless 0$

Związek między niemi:

$$\frac{du}{dt} = \lim \frac{u(x'y'z't') - u(x\,y\,z\,t)}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Resonancya: fale stojące

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + g\frac{a^2}{2} = \Big| ga - \text{[illegible]}$$

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} = ga - g\frac{a^2}{2} \Big| - \text{[illegible]}$$

Także bezpośrednio:

prędkość elementu poruszającego się zmienia się przez to że: $\Delta u =$

1). prędkość w ogóle się zmienia $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$

2). na tym miejscu w ogóle większa prędkość $\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\quad \text{Eulera}$$

Do tego jeszcze związek między gęstością i prędkością, bo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \qquad i\ \rho = f(p, \theta)$$

(Inny sposób: Lagrange'a)

Jeśli $\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = 0$ to $\rho = f(p)$ zatem $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{f(p)}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$

gdzie $P = \int \frac{1}{\rho}\,dp$

i jeśli $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ etc.

to można napisać prawe strony wszystkich równań: $= -\frac{\partial(U+P)}{\partial x}$ etc.

Do tego wszystkiego jeszcze warunki dla powierzchni

Jeśli nie ma tarcia to jedyny warunek że składowa normalna $= 0$

albo jeśli ruch to równy ruchowi ściany

Odkształcenia elementu cieczy

$x \; y \; z$ $\qquad \xi = x + u\Delta t$ $\qquad \| \; x' \; y' \; z' \qquad \xi' = x + u'\Delta t$ itd.

$\eta = y + v\Delta t$

$\zeta = z + w\Delta t$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \lim \frac{\xi' - \xi}{x' - x} = \lim \frac{u' - u}{x' - x}\Delta t = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta t \quad \text{itd.}$$

Mieliśmy odkształcenie:

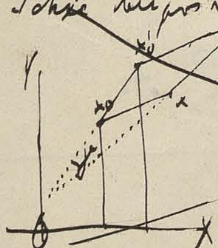
$$x' = x + a_1 x + \frac{c_1 + a_3}{2} z + \frac{a_2 + b_1}{2} y + \beta z - \gamma y \quad \Big\| \quad \beta = \frac{a_3 - c_1}{2}, \quad \gamma = \frac{b_1 - a_2}{2}$$

$$= x + \frac{\partial \xi}{\partial x} x + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}}{2} z + \frac{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}}{2} y + \underbrace{\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}}{2}}_{\beta} z - \underbrace{\frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}}{2}}_{\gamma} y$$

więc
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} &= 2\frac{\beta}{\Delta t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 2\frac{\gamma}{\Delta t} \end{aligned}\right\} \text{itd.} \qquad \theta = a_1 + b_2 + c_3 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta t$$

prędkości obrotowe = składowe ruchu wirowego

Także bezpośrednio:



$$\gamma = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} =$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_0' - y_0}{x_0' - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{(y' - y_0) - (y - y_0) + y_0 - y_0'}{}$$

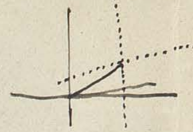
$$= \frac{(v' - v)\Delta t + \Delta y}{(u' - u)\Delta t + \Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v'}{u'}$$

$$\gamma = \frac{\Delta y\left[(u' - u)\Delta t + \Delta x\right] - \Delta x\left[(v' - v)\Delta t + \Delta y\right]}{\Delta y\left[(v' - v)\Delta t + \Delta y\right] + \Delta x\left[(u' - u)\Delta t + \Delta x\right]}$$

$$= \frac{\Delta t\left[(u' - u)\Delta y - (v' - v)\Delta x\right]}{\frac{\Delta y}{\Delta t}\left[\quad\right] + \frac{\Delta x}{\Delta t}} =$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t + \Delta y$$

$$\frac{\frac{v'}{u'} - \frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}\frac{v'}{u'}} = \frac{uv' - vu'}{uu' + vv'}$$



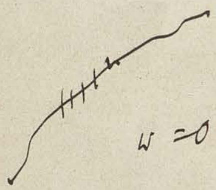
$u_1 = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \;\Big|\; + \frac{\partial u}{\partial t}\Delta t!$

$v_1 = v_0 + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z \;\Big|\; \dots$

$$\frac{\Delta y\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t + \Delta x\right] - \Delta x\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t + \Delta y\right]}{\left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]\Delta x \Delta y} =$$

$$= \Delta t \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta y} - \right]$$

Przykład: ruch (trwały) obrotowy w dwuch rozmiarach cieczy nieściśliwej



$w = 0$

Załóżmy że obrót koło punktu 0

więc że $u = f(r)\cdot\frac{-y}{r} = -\varphi\cdot y$

$v = f(r)\,\frac{x}{r} = \varphi x$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(U+P)}{\partial x}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(U+P)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -y\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{yx}{r}\varphi' \qquad \Big| \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi + \frac{x^2}{r}\varphi'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi - \frac{y^2}{r}\varphi' \qquad \Big| \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{yx}{r}\varphi'$$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

φ dowolne

$$+\varphi y\cdot\frac{yx}{r}\varphi' + \varphi x\left[-\varphi - \frac{y^2}{r}\varphi'\right] = -\varphi^2 x = -\frac{\partial(U+P)}{\partial x} = \Phi x$$

$$-\varphi y\left[\varphi + \frac{x^2}{r}\varphi'\right] + \varphi x\,\frac{yx}{r}\varphi' = -\varphi^2 y = -\frac{\partial(U+P)}{\partial y} = \Phi y$$

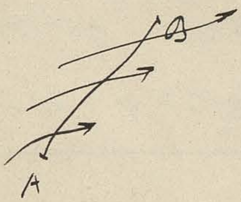
Jeśli $f = \frac{1}{r}$ $\quad \varphi = \frac{1}{r^2}$: $-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\varphi + r\varphi' = \frac{2}{r^2} - r\frac{2}{r^3} = 0$

$f = r$ $\quad \varphi = 1$: $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2$ Jak ciało stałego

Wyobrazić sobie 2 koła zębate

~~Średnia~~ Wewnętrzne musi się szybciej ~~równać~~ obracać niż zewnętrzne aby średni powstał ~~w spoczynku~~ ~~tym~~ samym położeniu.

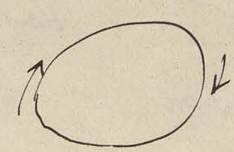
Prąd między A B :=



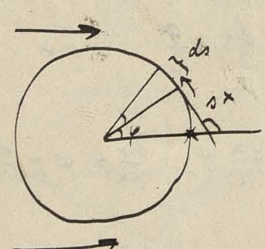
$$\int_A^B (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int_A^B \left[u \frac{dx}{ds} + \dots\right] ds =$$

$$C = \int_A^B \left[u \cos(sx) + v \cos(sy) + w \cos(sz)\right] ds$$

Krążenie (Circulation) jeśli krzywa zamknięta :



Np. $v = w = 0 \quad u = c$



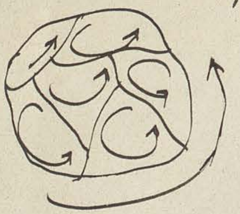
$ds = a\,d\varphi \qquad \cos(sx) = -\sin\varphi \qquad \cos sy = \cos\varphi$

$$C = -\int_0^{2\pi} c \sin\varphi\, a\,d\varphi = -ac \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi = ac \cos\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Jeśli jednak przyjęty przykład: $u = -\frac{y}{r} f$ $\left(= -\sin\varphi\, f\right)$ $\quad v = \frac{x}{r} f$ $\left(= \cos\varphi\, f\right)$

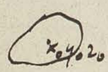
$$C = \int f (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,ds = \int f\,ds = 2\pi a f$$

jeżeli się do podstawy ... dwustronna przez obwód tedy cała siatka w ruchu!



Krążenie po obwodzie sieci = Σ krążeń po obwodach pojedynczych (naturalnie w jednym kierunku)

Krążenie po obwodzie nieskończenie małym:



$$u = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(z-z_0) \quad \text{etc.}$$

$$2\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial z} -$$

Albo jeżeli utożsamimy początek współrzędnych

$$u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z = u_0 + x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 \frac{y}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{z}{2} + \beta z - \gamma y$$

$$v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 z = v_0 + y\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 \frac{z}{2} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{x}{2} + \gamma x - \alpha z$$

$$w \qquad = w_0 + z\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 +$$

$$u = u_0 + Ax + Hy + Gz + \beta z - \gamma y$$

$$v = v_0 + Hx + By + Fz + \gamma x - \alpha z$$

$$w = w_0 + Gx + Fy + Cz + \alpha y - \beta x$$

$$\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \int (u_0\,dx + \ldots) + (Ax\,dx + By\,dy + Cz\,dz) + H(y\,dx + x\,dy) + G(z\,dx + x\,dz) + F(\;)$$

$$+ \alpha(y\,dz - z\,dy) + \beta(z\,dx - x\,dz) + \gamma(x\,dy - y\,dx)$$

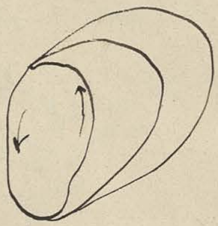
$$= \underbrace{\left[(u_0 x + \ldots) + A\frac{x^2}{2} + B\frac{y^2}{2} + C\frac{z^2}{2} + Hxy + Gxz + Fyz\right]}_{=0} + \int \alpha(y\,dz - z\,dy) + \ldots$$

$$\int \frac{y\,dz - z\,dy}{2} = f \cdot \cos(nx) \quad \text{etc.}$$

Więc $\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \iint [\alpha \cos nx + \beta \cos ny + \gamma \cos nz] F$

A $\Sigma \qquad = \Sigma$

$$\int u\,dx + \ldots = \iint \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\cos nx + \ldots \right] dF$$



Jakaś bądź powierzchnia z tą krzywą jako ~~krawędzią~~ brzegiem

Więc jeśli $\xi = \eta = \zeta = 0$ to $\oint$ krążenie po krzywej zamkniętej $= 0$

to nazwiemy ruchem nie wirowym

Rozważajmy teraz zmienność ~~krążenia~~ prądu t.j. tak że odnosimy go do krzywej poruszającej się razem z cieczą

$$\frac{d}{dt}\int_A^B \ldots = \int_A^B \frac{d}{dt}[u\,dx + \ldots]$$

~~także~~ dx zmienia się bo kształt krzywej zmienia się

$$\frac{d}{dt}(u\,dx) = \frac{du}{dt}\,dx + u\frac{d}{dt}(dx)$$

$$\frac{d}{dt}(dx) = d\left(\frac{dx}{dt}\right) = du$$

$$= \left[X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right]dx + \frac{1}{2}d(u^2)$$

$$\frac{d}{dt}\int_A^B (\quad) = \int_A^B \left\{\left[X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\right] - \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right] + \frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2)\right\}_A^B$$

Jeśli istnieją funkcya że $[\ldots] = -dU$ i $[\ldots] = dP$ wtedy

$$= \left[-(U+P) + \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right]_A^B$$

więc jeśli $A = B$ t.j. krzywa zamknięta (i jeśli U zgoła jednowartościowa)

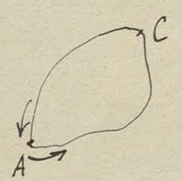
to $\frac{d^C}{dt} = 0$ zatem krążenie niezmienne

~~Z tego już: jeżeli w całej cieczy albo w części jej ruch niewirowy $\xi = \eta = \zeta = 0$~~

Ruch niewirowy: w przestrzeni o łączności pojedyńczej t. j. jeżeli jakąkolwiek krzywą zamkniętą się w cieczy można zredukować do zera przez ściąganie [illegible]

$\xi = \eta = \zeta = 0$ więc także krążenie $= 0$

zatem



$\int_A^C = -\int_C^A = \int_A^C$

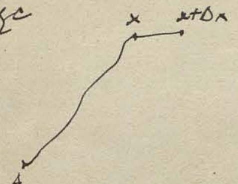
więc wartość prądu niezależna od ~~drogi~~ kształtu krzywej łączącej,

więc $\int_A^{(xyz)}$ jest funkcją (xyz) ale nie kształtu krzywej

$= \varphi(x, y, z)$

(to znaczy że funkcja pod $\int$ będzie całkowitą pochodną funkcji φ)

więc



$\int_x^{x+\Delta x} = u\,\Delta x = \varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)$

zatem $u = \lim \ldots = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

Przy tem punkt A był dowolny; gdybyśmy byli wyszli od innego punktu B toby trzeba dodać do φ jeszcze kawałek $\int_B^A$ t. j. stałą; w pochodnych to zatem nie sprawiłoby różnicy. Nazywamy φ potencyałem prędkości (jednowartościowym)

Także odwrotnie jeżeli istnieje potencyał prędkości to ruch jest niewirowy

bo $\xi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$ etc

Tutaj wyszliśmy z pojęcia prądu bo to zaraz daje geometryczne wyobrażenie wielkości φ ale można także postąpić czysto analitycznie: ~~[illegible]~~ każdym razem jeżeli mamy

równania $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial y}$ można u v w wyrazić jako pochodne funkcji $\int(u\,dx + v\,dy + w\,dz)$

$\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$

Z przeszłego twierdzenia wypływa równocześnie: ruch niewirowy zawsze pozostanie niewirowym (pod działaniem sił konserwatywnych i bez tarcia)

Jaki kształt przybiorą nasze równania? $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2)$$

Zatem:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) = -\frac{\partial(U+P)}{\partial x} \quad dx$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) = -\frac{\partial(U+P)}{\partial y} \quad dy$$

$$dz$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) = -(U+P)$$

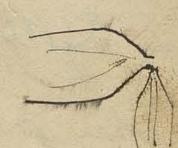
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta \varphi = 0$$

Jeśli ruch trwały: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ $\qquad$ ciecz nieściśliwa $P = \displaystyle\int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$

$$\frac{p}{\rho} = -U - \frac{1}{2}\overbrace{(u^2+v^2+w^2)}^{V^2}$$

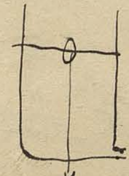
zatem ciśnienie tam najmniejsze gdzie prędkości największe

n. p. rozpylacz



(W tym równaniu mamy zawartą jako szczególny przypadek całą hidrostatykę)

Wypływ z naczynia pod wpływem ciężkości



$U = -gy + \text{const}$

$V^2 = +2gy - \text{const}\ (-\tfrac{p}{\rho})$ [illegible]

$0 = 0 + \text{const}$

$V^2 = 2gy$

t. j. prawo Torricellego — prędkość taka jak gdyby punkt spadł z powierzchni cieczy aż tamtąd (więc niezależnie od gęstości etc)

(W rzeczywistości nie byłby ruch całkiem niewirowy w pewnych górne warstwy wszystkie równolegle się poruszają do przy wyjściu Torric. ogólnie w rachunku)

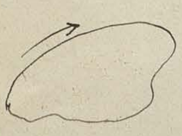
A oprócz tego ciśnienie nie byłoby całkiem $=0$ w przekroju wypływu tylko różne w różnych punktach, więc w ogóle nie całkiem równe prędkości.

Jeśli się wyrachuje masę cieczy wypływającej to $= \rho\, q \sqrt{2gy}$

ale na q nie należy wstawić przekroju tylko węższy (vena contracta), zależy od kształtu i przylegania cieczy $\left(\frac{1}{2} - 1\right)$ $0{\cdot}7$

z tego jest wynik pary $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ i warunku skończoności jednoznaczna funkcja jednowartościowa równa

~~Strugi~~ Linie prądu cieczy, podane przez kierunek $u\, v\, w$ w każdym punkcie:



w każdym punkcie V dodatni zatem $\frac{d\varphi}{ds} > 0$

więc φ ciągle rosnące a jednak znów musimy wrócić do tej samej wartości w punkcie x (ponieważ φ jednowartościowe), zatem w ogóle nie mogą istnieć ~~strugi~~ linie prądu zamknięte tylko muszą się kończyć na powierzchni jeśli potencyał i jeśli przestrzeń jednospójna (jeśli jednak) przy tem $qV = \text{const}$ wzdłuż strugi cieczy

Pierścień

Różnica $= \int$ składowej $= k$

prędkość $\int = \varphi + nk$

$\nabla^2\varphi = 0$ Potencyał linii siły = strugi etc.

W dwóch rozmiarach: $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ $\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \ldots\right] = -(U+P)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ do powierzchni $= 0$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \;\Big\|\; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Każda $f(x+iy) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ $= \frac{d}{dy}(\varphi + i\psi)$

$$\frac{df}{dy} = i f'(x+iy) = i\frac{d}{dx} f(x+iy) = i\frac{d}{dx}(\varphi + i\psi)$$

~~$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$~~ ~~$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$~~

$i\frac{\partial\psi}{\partial y} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $\quad$ rochy prostopadłe $\varphi \perp \psi$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

Fex. $f = Az^n = A(x+iy)^n$ $\quad x = r\cos\theta$

$$= Ar^n\left[\cos n\theta + i\sin n\theta\right]$$

$\varphi = Ar^n \cos n\theta$

$\psi = Ar^n \sin n\theta$

$n = 1$

$n = -1$ $\quad \varphi = \frac{A}{r}\cos\theta$

$\psi = -\frac{A}{r}\sin\theta$

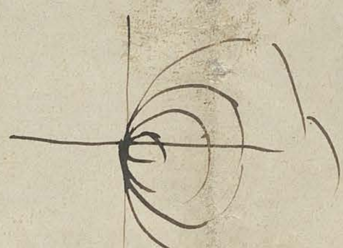
$u = \frac{\partial}{\partial x}$

$v = \frac{\partial}{\partial y}$

$r = c\cos\theta$

$r^2 = cx = (x^2+y^2)$

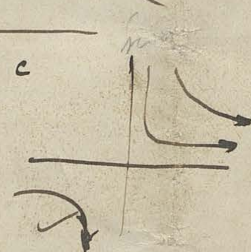
$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}$



Δz

$n = 2$ $\quad Ar^2 \cos 2\theta = c$

$2Axy = c$



$u = 2Ay$

$Ar^2\cos 2\theta$
$= A(x^2 - y^2) =$
hiperboly równoboczne
w osi X

$n - 2$ Lemniscaty

$2\pi r V = \text{const}$

$V = \frac{a}{2\pi r}$

$f = +\mu \log z = +\mu \log(\underbrace{x+iy}_{r(\cos\theta + i\sin\theta)}) = +\mu\left[i\theta + \log r\right]$ $\quad (re^{i\theta})$

$\varphi = +\mu\theta$ $\quad \psi = +\mu \log r$

Tutaj φ wielowartościowe takie do prawdy linie prądu zamknięte
bo punkt O = osobliwy

to są postępowe, a stojące:

Na obu stronach otwarte

ciśnienie stałe = 0

$$\sigma = 0$$

$$u = A\begin{Bmatrix}\cos \alpha t \cos \beta x \\ \sin \alpha t \sin \beta x\end{Bmatrix} \qquad \alpha = a\beta = \frac{2\pi}{T}$$

$$\sigma = \int \frac{\partial u}{\partial x}\, dt = A\frac{\beta}{\alpha}\begin{Bmatrix}\sin \alpha t - \sin \beta x \\ -\cos \alpha t \cos \beta x\end{Bmatrix}$$

$\sigma = 0 \quad x = 0, \; x = l$

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}\left(A \sin \alpha t + B \cos \alpha t\right) \sin \beta x$$

$$\beta l = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots = \frac{2\pi l n}{a}$$

$$n = \frac{a}{2l}, \; 2\frac{a}{2l}, \; 3\frac{a}{2l}, \ldots$$

Na jednej stronie otwarte:

$\sigma = 0 \quad x = 0$

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}\left(A \cos \alpha t + B \sin \alpha t\right) \sin \beta x$$

$u = 0 \quad x = l$

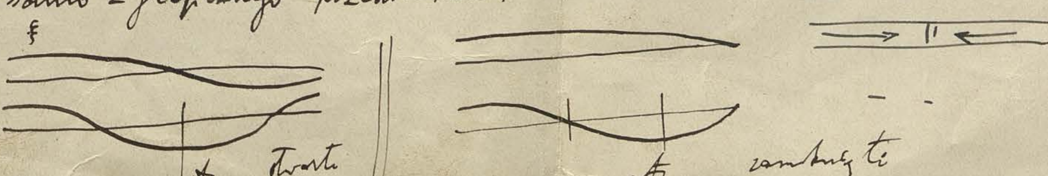
$$u = \left(A \sin \alpha t - B \cos \alpha t\right) \cos \beta x$$

$$\beta l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$$

$$n = \frac{a}{4l}, \; 3\frac{a}{4l}, \; 5\frac{a}{4l} \ldots$$

więc niższa oktawa, a górne tony tylko nieparzyste

Tak samo z graficznego przedstawienia



Aerodynamika

Wypływ przez „diaphragmę"

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2) = -(U+P)$$

$$V_1^2 = 2\frac{p_0}{\rho_0}\log p_1 + \text{const}$$

$$0 = 2\frac{p_0}{\rho_0}\log p_2 + \text{const}$$

$$V^2 = 2\frac{p_0}{\rho_0}\log\frac{p_1}{p_2}$$

więc w każdym razie odwrotnie prop. do gęstości gazu (prawo Bunsena)

izotermicznie

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0}\,p$$

Gdyby adiabatycznie:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa = \frac{p}{p_0}$$

$$\rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\int\frac{dp}{p^{\frac{1}{\kappa}}}\cdot\frac{p_0^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0} = \frac{\kappa}{\kappa-1}\,\frac{p_0^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0}\,p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$V_0^2 = \frac{2\kappa}{\kappa-1}\,\frac{p_0^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0}\,p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} + \text{const}$$

$$0 = \text{-- -- --}\quad p_2$$

$$V^2 = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}p_0 - \left(\frac{p_0}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}p_2\right]$$

$$= \frac{p_0}{\rho_0}\,\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]$$

$$= \frac{2\kappa}{\kappa-1}\,R(\theta_0-\theta_1) = \frac{2}{\kappa-1}(c_0^2-c^2)$$

Drgania w rurach: $v = w = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa = p_0\left[1+\underbrace{\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}}_{\sigma}\right]^\kappa \approx p_0(1+\kappa\sigma)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_0\kappa\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \rho_0\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

Gdybyśmy byli używali prawa Mariotte'a:

$$p = p_0\frac{\rho}{\rho_0} = p_0(1+\sigma)$$

toby było $a = \sqrt{\alpha\theta}$ (Newton – Laplace)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{p_0}{\rho_0}\kappa\frac{\partial\sigma}{\partial x} \qquad \Big|\ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\rho_0\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial u}{\partial x} + u\,\rho_0\frac{\partial\sigma}{\partial x} = 0 \qquad \Big|\ \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{p_0\kappa}{\rho_0}}_{a^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \Big\| \qquad a = \sqrt{\frac{p_0\kappa}{\rho_0}}$$

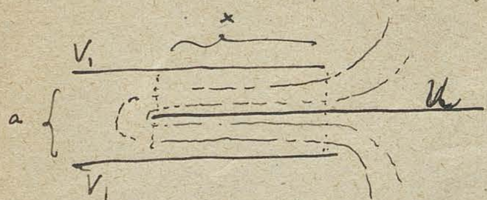
$$u = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

więc ponieważ $\frac{p_0}{\rho_0} = \alpha\theta$

$a = \sqrt{\alpha\theta\kappa}$ niezależnie od ciśnienia ale od temp.

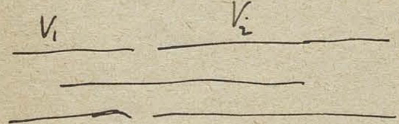
odwrotnie z tego można znaleźć κ

Siła działająca na płytę przesuwającą się równolegle w kondensatorze



$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi} a x \left[\frac{2(V_1 - U)}{a}\right]^2 = \frac{x}{2a\pi}(V_1 - U)^2$$

$$F_x = \frac{(V_1 - U)^2}{2a\pi}$$

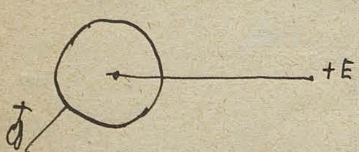


$$F_x = \frac{(V_1 - U)^2 - (V_2 - U)^2}{2a\pi} = \frac{V_1^2 - V_2^2 + 2U(V_2 - V_1)}{2a\pi}$$

$$= \frac{\left[-(V_1 + V_2) + 2U\right](V_2 - V_1)}{2a\pi}$$

zatem $\varphi = k(V_2 - V_1)\left[U - \frac{1}{2}(V_1 + V_2)\right]$

w elektrometrze kwadrantowym



$$F = \frac{EE'}{\underbrace{\left(p - \frac{a^2}{p}\right)^2}_{r^2}} = \frac{E^2 a}{p\left(p - \frac{a^2}{p}\right)^2} = \frac{E^2 a p}{(p^2 - a^2)^2}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{EE'}{p - \frac{a^2}{p}} = \frac{1}{2}\frac{E^2 a}{(p^2 - a^2)}$$

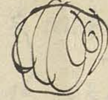
$$\frac{\partial W}{\partial p} = \frac{E^2 a p}{(p^2 - a^2)^2}$$

Albo także $W = \frac{1}{2}\Sigma eU = 2\,\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4\pi}\frac{U}{\frac{a}{2}}\right)\cdot U = \frac{U^2 x}{2a\pi}$

Hoffman $1\,\text{Volt} = \frac{1}{3000}$

Kopoz. = 5 cm igła i zwierciadło 1.5 mg!

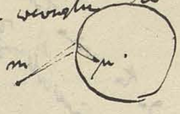
1. ~~pot~~ wzrastanie lub malenie ciężkości z głębokością zależne od tego czy $\rho_{pow} \lessgtr \frac{2}{3}\bar{\rho}$

2). Pot. kuli obliczony z krążków 

3). Średnia wartość pot. jednego punktu na powierzchni kuli = pot w środku kuli

więc ogólnie

α). jeżeli nie ma mas w wewnątrz to $\bar{V} = V_0$

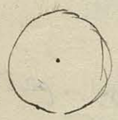
β). jeżeli są masy w wewnątrz to 

$$\sum d S \frac{m}{2} + \sum \frac{dS}{\rho}\mu = \bar{V}\left(\frac{m}{R} + \frac{\mu}{a}\right)$$

~~$\bar{V} = V$~~ $\sum\left(\frac{m}{R}+\frac{\mu}{a}\right) = \bar{V}$

Np. ~~jeżeli jednostajna gęstość~~

4). Wyprowadzenie siły wgłębi przez kulę zapomocą wzoru Gaussa



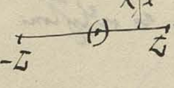
$$4\pi r^2 f = 4\pi M \quad /ex$$

$$= 4\pi M \frac{r^3}{a^3} \quad /int.$$

5). Potencyał prostej $\rho \log \frac{x+L+\sqrt{(x+L)^2+R^2}}{x-L+\sqrt{(x-L)^2+R^2}}$; $-2\rho \log R + \rho \log [L-x+\sqrt{(L-x)^2+R^2}][L+x+\sqrt{\ldots}]$

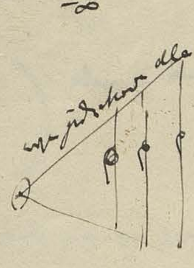
$x > L$ $\qquad +L > x > -L$

$$\rho \log \frac{L-x+\sqrt{(L-x)^2+R^2}}{L+x+\sqrt{(L+x)^2+R^2}} \quad x < L$$

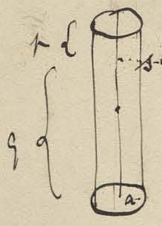


$$\int_{-\infty}^{+\infty} = -2\rho \log R$$

↑ zależy tylko od stosunku $x:R:L$ więc



6). Walec (powierzchniowy)



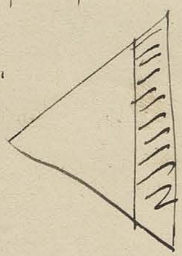
$$V_i = 4\pi\rho a \lg\left(\frac{2\sqrt{rq}}{a}\right)$$

$$V_e = 4\pi\rho a \lg\left(\frac{2\sqrt{rq}}{s}\right)$$

?

~~$2\pi\int r\,dr\,d\varepsilon\,\lg\left(x+h+\sqrt{(x+h)^2+(s-r\cos\varepsilon)^2+r^2\sin^2\varepsilon}\right)$~~

7). odcinek trójkąta



jeśli to prawda to mamy także takie [illegible] (przez różniczk. $\frac{\partial}{\partial s}$ $\frac{\partial}{\partial \rho}$) pot. drugiego!)

8). Walec masywny (Sam) $V_a = 2\pi\rho a^2 \lg\frac{2\sqrt{rq}}{s}$

$$V_i = 2\pi\rho a^2\left[\lg\frac{2\sqrt{rq}}{a} + \frac{1}{2}(a^2-s^2)\right]$$

w razie ∞:

$= -2\pi\rho a^2 \lg s$

$= \rho\pi a^2(1-2\lg a) - \rho\pi s^2$

Siła na punkt w osi! (z miękką)

kiedy lim a=∞ znów z-ówb

9). Siła przez do odległości kula przyciąga tak jak gdyby cała masa skupiona w środku

$$\frac{2\pi r^2}{2}\sin\varphi\,d\varphi\,dr\,[r^2+R^2-2rR\cos\varphi]$$

sin r² ?

$$= \pi r^3 R \cos\varphi\Big|_0^{2} = \int 2\pi r^3 R\,dr =$$

$$= \pi r^4 R$$

Energja grawit. Ziemi   Jeżeli stopniowo narastają

$$\int_0^\infty k \underbrace{4\pi r^2 \rho\, dr}_{dm} \; \frac{4}{3}\pi r^2 \rho = \frac{16}{3}\pi^2 k \rho^2 \int r^4 dr$$

$$W = \frac{16}{15}\pi^2 k \rho^2 a^5$$

$$g = \frac{4}{3}\pi a \rho k$$

$$W = \frac{4}{5} a^4 \pi \rho g$$

$$= 2{\cdot}2 . 10^{39}\ \text{erg} = 5{\cdot}3 . 10^{28}\ \text{cal}$$

względna kula o promieniu ---

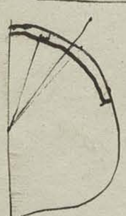
Albo też $= \frac{1}{2}\Sigma m V$

$$\frac{1}{r^2}\int_0^r 4\pi r^2 \rho_r\, dr = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\int_0^r = -r^2\frac{\partial V}{\partial r}$$

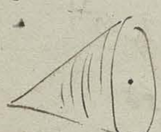
$$4\pi r^2 \rho = -r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - 2r\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$r\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2\frac{\partial V}{\partial r} = -4\pi r \rho$$



$$\frac{1}{a^2}\int d\varphi \cos\varphi = \ldots$$

przyciąg. [illegible] kuli na środek



Stożek na wierzchołek $\sqrt{x^2} \ldots$

odcinek kuli

Jeżeli przyciąg. przez ośrodek taki jak gdyby skupione w środku masy

$$\Sigma m x \frac{x}{2} = \Sigma m = \xi \Sigma m$$

$$\int a\,d\varphi\ \lg\left(L - x + \sqrt{(x-L)^2 + d^2 + a^2 - 2ad\cos\varphi}\right)$$

$$= \varphi \lg - \int$$

$$\int d\varphi \lg \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\int d\varphi\ \lg(1-\alpha\cos\varphi)\right] = \int \frac{\cos\varphi}{1-\alpha\cos\varphi}\,d\varphi =$$

Ilość ciepła promieniow. przez Słońce $\frac{4\,g\,cal}{sec}$ na cm²

$$4\pi(150.10^{11})^2.\ 4.\ 86{,}4\ 10^3.\ 365.\ 4{\cdot}2.10^7 = 1{\cdot}6.\ 8{\cdot}6.\ 3{\cdot}6.\ 4{\cdot}2.\ 3{\cdot}2.\ 10^{40}$$

$$1{\cdot}5.\ 9 \qquad 2{\cdot}8.4.4.3.$$

$$13.48$$
$$144$$
$$624 \qquad = 6{\cdot}2.\ 10^{42}$$

$$W = \frac{4}{5}\,a^4\pi\rho\,g \qquad \frac{16}{15}a^5\pi^2\kappa\rho^2$$

$$= \frac{3}{5} a M g \qquad = \frac{4}{5} M a^2 \pi\kappa\rho$$

$$= \frac{3}{5}\frac{M^2\kappa}{a}$$

$$\delta W = \frac{8}{5} M a^2 \pi \kappa \left(\frac{\delta a}{a}\right)$$

$$= 2W\left(\frac{\delta a}{a}\right)$$

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{1}{2W}$$

$$M = 2.10^{27}\ ton = 2.10^{27}10^6$$

$$a = 0{\cdot}7\ 10^6\ km = 7.10^{10}$$

$$\kappa = 6{\cdot}6.\ 10^{-8}$$

$$W = \frac{4}{5}.66.\ 5{\cdot}4.\ (1{\cdot}4)^2.\ 10^{22}\ 2.10^{33}$$

$$= 48 \qquad = 9{\cdot}6\ 10^{48}$$

$$2{\cdot}3.10^{48}$$

$$\left(\frac{\delta a}{a}\right)_{na\ rok} = \frac{6{\cdot}2.10^{42}}{9{\cdot}6.\ 10^{56}} = \frac{2}{3}.10^{-14}$$

$$\frac{W}{\Delta} = \frac{2{\cdot}3.10^{48}}{6{\cdot}2.10^{42}} = \frac{1}{3}\ 10^6\ lat$$

$$ga(1-\delta) + \frac{c}{R_0\left[1 - 2\frac{r}{R}\cos\varphi + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{1/2}} + \frac{\omega^2}{2} R^2\left[1-\frac{r}{R}\cos\varphi\right]^2 =$$

$$ga(1-\delta) + \frac{c}{R}\left[1 + \frac{r}{R}\cos\varphi - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2(1-3\cos^2\varphi)\right] + \frac{\omega^2 R^2}{2}\left[1 - \frac{2r}{R}\cos\varphi + \left(\frac{r}{R}\right)^2\cos^2\varphi\right] =$$

$$\frac{c}{R^2} = \omega^2 R$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2$$

$$= ga(1-\delta) + \omega^2R^2\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2(1-4\cos^2\varphi)\right]$$

$$= U_0 - ga\delta + 2\omega^2 r^2\cos^2\varphi$$

$$\delta = \frac{2\omega^2 a \cos^2\varphi}{g}$$

$$\frac{c}{R^2} = \omega^2 R = \frac{M_\odot}{M_\delta}\left(\frac{a}{R}\right)^2$$

$$\omega^2 = \frac{M_\odot}{M_\delta}\frac{a^2}{R^3}$$

$$2\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \cdot \frac{6360 \cdot 10^5}{10^3} = 2\left(\frac{\pi}{432}\right)^2 \cdot 6.36 \cdot 10^{-8+3+5-3}$$

$$\delta = 2\frac{M_\odot}{M_\delta}\frac{a^3}{R^3}\frac{\cos^2\varphi}{g}$$

$F = \mu \frac{\partial u}{\partial x} q$

$m \frac{l}{t^2} = \mu \, \frac{l^2}{t}$

$\mu = \frac{m}{lt}$

u, μ, ρ, a

$f\left[\frac{l}{t}, \frac{m}{lt}, \frac{m}{l^3}, l\right] = \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{u}{\mu} \rho a$

$\frac{l^2}{m} \frac{m}{l^3}$

Reynolds

$\varepsilon = \frac{u_0 a \rho}{\mu} = 1000$

woda	20°	0·01
gliceryna	ca.	10
Kwas siark.		0·22
eter		0·0026
rtęć		0·016
smoła		ca 10^6 ?

Poiseuille 1840

1840

od do 0·0015

$u_0 = \frac{p_1 - p_2}{8 \mu l} R^2$

w szerszych rurach

$p_1 - p_2 = \frac{u^2 l}{d} \rho$

$\frac{\Delta p \; a^3 \rho}{8 \mu^2 l} = 1000$

$\frac{\Delta p}{l} = \frac{8000 \cdot 10^{-4}}{a^3} = \frac{0·8}{a^3}$

$l = 10 \quad a = 10^{-1}$

$\Delta p = 80 \cdot \quad = \underline{80} \; 0·7 \cdot 10^{-3}$

Podobnie jeśli prawdop. przyjścia zdarzenia = p

" " zdarzenia przeciwnego = q

i robimy n prób

prawdop. ażeby się to zdarzenie powtórzyło α razy (niezależnie od pewnego porządku):

Prawd. pewnej kombinacji 1 0 1 1 0 0 0 = złożone = $p^{\alpha} q^{n-\alpha}$

jeśli nam nie chodzi o porządek to trzeba to pomnożyć przez liczbę kombinacji $\binom{n}{\alpha}$

więc $$\frac{n!}{\alpha!\,(n-\alpha)!}\, p^{\alpha} q^{n-\alpha} \neq \frac{1}{\sqrt{2\pi n p q}}\, e^{-\frac{h^2}{2npq}} \qquad h = np - \alpha$$

przeciętnie umiera rocznie (T) pewnych ludzi, więc

N. p. prawdop. aby osobnik X umarł w ciągu jednego dnia czasu t = ε

aby nie umarł $1-\varepsilon$

prawdop. aby w ciągu n dni umarło α osób

$$\neq \frac{1}{\sqrt{2\pi n\,\varepsilon(1-\varepsilon)}}\, e^{-\frac{(n\varepsilon-\alpha)^2}{2n\varepsilon(1-\varepsilon)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\varepsilon}}\, e^{-\frac{(n\varepsilon-\alpha)^2}{2n\varepsilon}}$$

najwięcej prawdop. $\alpha = n\varepsilon$

$n\varepsilon = \nu$ = normalna liczba umierających

$\frac{\nu-\alpha}{\nu}$ = procentowe zboczenie = δ

$$p(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\, e^{-\frac{\nu\delta^2}{2}}$$

przez to zboczenie

$\frac{\alpha}{\nu} = x$

$\frac{1}{\nu} = dx$

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\, e^{-\frac{\nu}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\nu}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left[e^{-0} + e^{-\frac{\nu}{2}\left(\frac{1}{\nu}\right)^2} + e^{-\frac{\nu}{2}\left(\frac{2}{\nu}\right)^2} \dots\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\, \nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\nu x^2}{2}}\, dx = 1$$

(the integral $= \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}$)

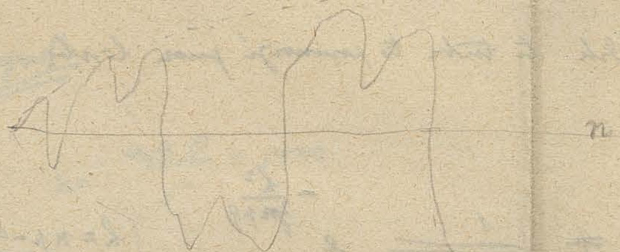
Dusza 2048 / 4096

prawdop. że [odchylenie] δ leżało w granicach 0 — +δ:

$$= \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_0^{\delta} e^{-\frac{\nu x^2}{2}}\, dx$$

średnie odchylenie $\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \int_0^{\delta} x\, e^{-\frac{\nu x^2}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}}$

jeśli ν, α nie duże liczby: $\nu^{\frac{\alpha-\nu}{2}} / \alpha!$



Jeśli stawiam zawsze tyle że gram aż otrzymam sumę b, mój kapitał wynosi a:

Prawdop. że po n rzutach odchylenie [dodatnie] > b−a :

$$\sum_{m=b-a}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\mu\pi}}\, e^{-\frac{m^2}{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\frac{b-a}{n}}^{\infty} e^{-\frac{x^2 n}{2}}\, dx$$

a równocześnie że w tym czasie ni zdarzyło się ani razu odchylenie ujemne −a ?

prawdop. że przy n rzutach raz zdarzyło się odchylenie −a ?

$$= \sum_{n=0}^{n} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{\frac{a}{n}}^{\infty} e^{-\frac{n x^2}{2}}\, dx = \sum_{n=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{2n}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}} e^{-z^2}\, dz + \int_{\frac{a}{\sqrt{2\cdot 2}}} + \int_{\frac{a}{\sqrt{2\cdot 3}}} + \int_{\frac{a}{\sqrt{2\cdot 4}}} \dots \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{n} dy \int_{\frac{a}{\sqrt{2y}}}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

$$a_1 = \frac{1}{E}\left[X_x - \mu(Y_y + Z_z)\right]$$
$$b_2 = \frac{1}{E}\left[Y_y - \mu(X_x + Z_z)\right]$$
$$c_3 = \frac{1}{E}\left[Z_z - \mu(X_x + Y_y)\right]$$

$$a_1 = \frac{1}{E}\left[X_x - \mu(Y_y + Z_z)\right] \quad \Big| \; 1-\mu$$
$$b_2 + c_3 = \frac{1}{E}\left[(1-\mu)(Y_y + Z_z) - 2\mu X_x\right] \quad \Big| \; \mu$$
$$a_1(1-\mu) + \mu(b_2 + c_3) = \frac{1}{E}\left[(1-\mu) - 2\mu^2\right] X_x$$

$$X_x = \frac{E}{1-\mu-2\mu^2}\left[a_1(1-2\mu) + \mu(a_1 + b_2 + c_3)\right]$$
$$1-\mu-2\mu^2 = (1+\mu)(1-2\mu)$$

$$X_x = \frac{E}{1+\mu}\left[a_1 + \frac{\mu}{1-2\mu}(a_1 + b_2 + c_3)\right] \qquad X_y = \frac{E}{2(\mu+1)}(a_2 + b_1)$$
$$\frac{E}{1+\mu} = 2T, \quad \frac{\mu}{1-2\mu} = L, \quad \frac{E}{2(\mu+1)} = T \quad \text{etc.}$$

~~$X_x = \frac{E}{1+\mu}$~~

$$X_x = 2T\left[\frac{\partial\xi}{\partial x} + L\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right] \quad \Big| \quad X_y = T\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)$$
$$Y_y = \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$
$$\ldots \qquad \ldots \quad \frac{E}{2(1+\mu)}\left[1 + \frac{2\mu}{1-2\mu}\right] = \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}$$

Z tego: $$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \rho X + T\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) + T(1+2L)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = a_1 + b_2 + c_3 = \text{zmiana objętości} = \theta$$

Te równania służą dla wnętrza ciała, dla powierzchni muszą być dane siły przyczepione t.j. X Y Z, wstawione w równania $X = X_x \cos nx + X_y \ldots + X_z \ldots$ etc.

Tylko jedno rozwiązanie możliwe jeżeli te warunki są dane, co Kirchhoff udowodnił

Bardzo ważna rzecz bo wiemy z tego że jeśli w jakiś bądź sposób odgadniemy jakieś rozwiązanie to ~~to~~ ono jest jedynie możliwem.

[N. p. równania wszystkie spełnione dla
X_x = const Y_y = const etc. otrzymamy odkształcenie jednorodne $\xi = \ldots$

Potencyał $W = \Sigma\left[L(\alpha+\beta+\gamma)^2 + \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + \frac{\varphi^2+\psi^2+\chi^2}{2}\right]$

Elasp. średnie ciśnień

Wszystko to naturalnie tylko ważne pod założeniem że ciało jest jednorodnem i równokierunkowem. Kryształy zupełnie mają w najogólniejszym wypadku gdzie nie ma symetryi według ~~36~~ 21 spółczynników

W systemie równoosiowym mamy 3 spółczynniki (sól, fluoryt, ~~[illegible]~~ miedź, srebro etc.)

tutaj tylko dwa.

Właściwie i te ciała nie są równok. tylko tworzą conglomerat zbiorowisko kryształków (tylko niektóre n. p. szkło, może nie mają śladu kryszt.).

Poisson sądził że tylko 1. spółczynnik dowolny, a że μ dla wszystkich ciał 0.25

Na podstawie teoryi molekularnej [. ...

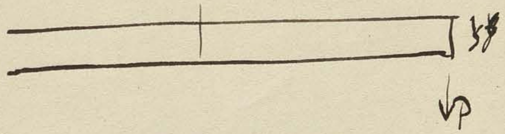
okazało się nieprawdziwem.

Teorya ~~[illegible]~~ sił biegunowych polarnych Voigta.

Wytrzymałość równa w całej belce jeśli wydłużenie maksymalne każdego przekroju równe

$$\frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{y}{R} \qquad \text{więc jeśli } \frac{y}{R} = \text{const} = c$$

I).



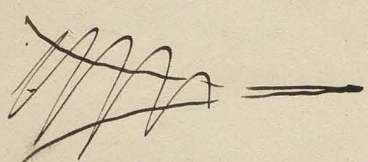
$$\frac{1}{R} = \frac{m}{y}$$

$$P(l-x) = \frac{E\Theta}{R} = \frac{\alpha}{y}\, y^2 = \alpha y$$

$$y \sim (l-x)$$

II).
$$\int_x^l p_\xi (\xi - x)\, d\xi = \alpha y \qquad \text{jeśli } p_\xi = \text{const}$$

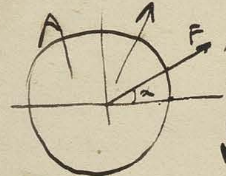
$$= p\left(\frac{l^2 - x^2}{2} - l^2 + x^2\right) = p\, \frac{l^2 - x^2}{2}$$



$$p = a(l-x)$$

$$\int_x^l (l-\xi)(\xi - x)\, d\xi = l\left[\frac{x^2 - l^2}{2}\right] - \frac{l^3 - x^3}{3} + x\left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right)$$

Wytrzymałość obręczy wirującej



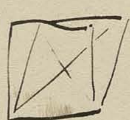
$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} F \sin\alpha \; a \, d\alpha = \frac{2Fa}{2}$$

to samo z prawa $\quad 2\pi a \, F \, d\alpha = P \, 2\pi \, da$

$$P = aF$$

$F = q\omega^2 a \qquad \frac{P}{q} = \omega^2 a^2$

$4.10^9 = \omega^2 a^2 \quad // \; a = 1m \qquad \omega < 600 \qquad n = 100$



Skręt walca; pętla wypowiedziana

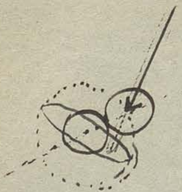
Podobnie też dla cienkiej rury

$F\| \quad \frac{aF}{\delta} < \varepsilon$

555 $\quad .981.10^6$

wytrzym.	drzewo	0·4 $\frac{ton}{cm^2}$
	żelazo	4·0
	stal (stara)	24·0
	szkło	0·6
	ołów	0·2

molekula wyrzucił



$f(\xi\,\eta\,\zeta)\; f(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\; d\omega\; d\omega_1$

$\cdot\; n\; g\; b\; db\; d\varepsilon$

$b\,db\,d\varepsilon = \sigma^2\, d\lambda \cos$

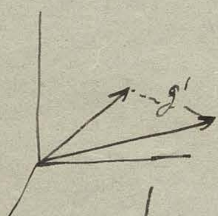
$\cdot\cdot\; dt$

$\cdot\; do$

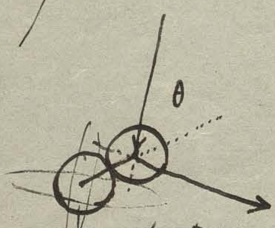
$$\int f(\xi\,\eta\,\zeta)\, f(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\; g\; b\, db\, d\varepsilon\; n\, d\omega\, d\omega\, d\omega_1\, dt$$

$$\xi' = \xi + (\xi_1 - \xi)\cos^2\theta + \sqrt{g^2 - (\xi - \xi_1)^2}\,\cos\theta\,\sin\theta\,\cos\varepsilon$$

przeciwne zderzenia



$$\int f(\xi'\,\eta'\,\zeta')\; f(\xi_1'\,\eta_1'\,\zeta_1')\; g'\, b'\, db'\, d\varepsilon'\, d\omega \ldots$$



przypadek stycznia

rozkład stateczny jeśli

$$\int (f f_1 - f' f_1') \ldots = 0$$

symetrya $g = g'$

$b = b'$

....

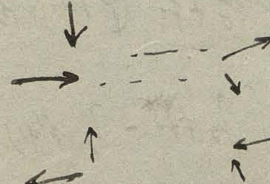
$$e^{-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\; e^{-(\xi_1^2\,\eta_1^2\,\zeta_1^2)} = e^{-(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2+\xi_1'^2\,\eta_1' \ldots)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int f f_1\, d\omega_1 \ldots - \int f' f_1'\, d\omega_1' \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\int (f f_1 - f' f_1')\, d\omega_1 \ldots$$

Centralne siły odwracalne

Jeśli się odwróci ruch



geometryczna konstrukcya

$d\omega = d\omega'$

Boltzmann I p. 26

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} C^3 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}} d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1$$

$$4\pi v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$$

$$\frac{\partial}{\partial (v^2)} \left(v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \right) = 0$$

$$v = \alpha$$

$$\int v^4 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$$

$$H = \int f \lg f \, d\omega$$

$$H' = \int f' \lg f' \, d\omega'$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \lg f \, d\omega + \int \frac{\partial f}{\partial t} d\omega$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int f \, d\omega = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int (f' f_1' - f f_1) \, b \, db \, d\varepsilon \, d\omega_1$$

$$\frac{dH}{dt} = \int \lg f \, (f' f_1' - f f_1) \, b \, db \, d\varepsilon \, d\omega_1$$

$$= \int \lg f_1 \, (f' f_1' - f f_1) \, b \, d\omega \ldots$$

$$= \int \lg f' \, (f f_1 - f' f_1') \ldots$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2} \int \lg f f_1 \, (f' f_1' - f f_1) \, b \, d\ldots$$

$$= \frac{1}{4} \int (\lg f f_1 - \lg f' f_1') (f' f_1' - f f_1) \, b \ldots$$

$$= -\frac{1}{4} \int (\lg f f_1 - \lg f' f_1') (f f_1 - f' f_1') \, b \ldots$$

II Zboczenia od praw termodynamiki

Stan równowagi termodyn. $\theta = \text{const}$

Clausius $\frac{n m c^2}{3} = p$ $\qquad c = \sqrt{3R\theta}$

Maxwell rozkład prędkości

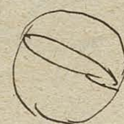
$$\varphi(\xi)\,\varphi(\eta)\,\varphi(\zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$$

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{1}{\alpha^3 \pi^{3/2}}\, e^{-\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{\alpha^2}}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

~~$\bar{c} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha = 1.128\,\alpha$~~

$$\overline{c^2} = \frac{3}{2}\alpha^2$$

$N(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega \quad f_1\, d\omega_1 \quad \sigma^2 g\, b\, db\, d\varepsilon$ ~~$\cos\theta\; d\lambda$~~ dt



r berufen uns auf die seitens der Mechanik ausführlich begründeten daß die Zustände, welche ein im t befindliches System durchläuft, chen Zustandsverteilung entsprechen, Wahrscheinlichkeit eines bestimmten, oordinaten q und die Momente p ustandes des Systems (welches in e den betrachteten Körper und das le Temperaturbad umfaßt) bestimmt Boltzmann-Gibbssche Formel:

$$\cdot^{-\frac{N}{H\Theta}E} dq_1 dq_2 \ldots dp_1 dp_2 \ldots dp_n, \quad (3)$$

die der betreffenden Konfiguration Gesamtenergie bedeutet. Integriert Ausdruck nach allen Variabeln mit er (mit einem q identischen) Ko- elche die Abweichung des Systems ustande definiert, so erhält man für er Systeme, welche zwischen ε und n, einen Ausdruck

$$dW = a\, e^{-\frac{N}{H\Theta}\lambda(\varepsilon)}\, d\varepsilon, \quad (4)$$

bei Verschiebung der Koordinate ε rachteten Zustand in den normalen tszustand geleistete Arbeit bedeutet. a im allgemeinen eine Funktion nur dann genau konstant, wenn die so gewählt ist, daß sie in der ie E ausschließlich in dem Aus- orkommt. Dies erfordert vor allem, t Veränderung von ε zusammen- netische Energie sich (in dem in mmenden Bereiche) als $L = \alpha\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2$, on ε unabhängigen Koeffizienten α

Praxis kann man meist durch ein es Kriterium über die Konstanz des zw. über die Zulässigkeit der Wahl nte ε entscheiden. Denkt man sich auf Veränderung der Koordinate ε Kraft $-\frac{\partial\chi}{\partial\varepsilon}$ durch eine genau gleiche, engesetzte Zusatzkraft aufgehoben, st von vornherein klar, ob in diesem „astatischen" System alle Werte n wahrscheinlich sind, ob also in ... stem das a der Formel (...

diesbezüglich zu einem kommen übereinstimme Die von mir abgeleitet einen von der Einst Zahlenkoeffizienten, doc stande nie eine Bedeut die dabei verwendete Be den Vorteil, daß sie ei den eigentlichen Mecha Bewegung gibt als di weniger anschaulichen thoden, aber ihre Anwe führung gewisser rechn — wie leider so viele schen Gastheorie —, Zahlenkoeffizienten be handelte sich nun dama Form und die Größen und man vermutete ga haupt auf diesem Gebie telle Messungen ausfü wenige Jahre nachher, und seinen Mitarbeitern Heute besteht wohl ke der von Einstein ang großer Annäherung ri allgemein für die inner mittlere Änderung der

$$\sqrt{\overline{\Delta^2}} = \sqrt{\ldots}$$

wo B die Beweglichke reziproken Wert des R cher einer mit der G genden Änderung der entgegenwirkt. Hand translatorische Beweg ist $\frac{1}{B} = 6\pi\mu a$, bei

$\frac{1}{B} = 8\pi\mu a^3$, ebenso l den Werte für andere idische Gestalt, leicht

Wie schön, wie al Abhängigkeit von μ, t wert der Konstante) u theoretischen Formeln Svedberg, Perrin, browski, Seddig u. durch Zangger und B darauf brauche ich w zugehen. Es sind j suchungen Perrins u wiß hinreichend bekan wirklich ein ganz klass die kinetische Atomis die uns hier interessie

§ 6. Auch die von Vermutungen betreffs der Brownschen Bewe Gasen schweben, sin

Hydrodynamik

der Form nach voll-
nden Resultate geführt.
e Formel enthielt zwar
einschen verschiedenen
h habe ich diesem Um-
ng beigemessen. Denn
rechnungsart bietet zwar
en besseren Einblick in
ismus der Brownschen
übrigen, physikalisch
und mehr indirekten Me-
ndung erfordert die Ein-
rischer Vereinfachungen
Rechnungen der kineti-
welche den Wert des
influssen müssen. Es
ls nur um die allgemeine
ordnung des Resultates,
r nicht, daß sich über-
te so exakte experimen-
hren lassen, wie solche
namentlich von Perrin
angestellt worden sind.
n Zweifel darüber, daß
gegebene Zahlenfaktor mit
chtig ist, daß man also
alb der Zeit t eintretende
x-Koordinate hat:

$$\frac{2H\Theta}{N}\sqrt{Bt}, \qquad (5)$$

t bedeutet, das ist den
ibungswiderstandes, wel-
schwindigkeit Eins erfol-
betreffenden Koordinate
elt es sich also um
ung einer Kugel, so

rotatorischer Bewegung

assen sich die betreffen-

Fälle, z. B. eine ellipso-
berechnen.
lseitig (in bezug auf die
, a, sowie den Absolut-
d quantitativ genau diese
durch die Arbeiten[1]) von
Chaudesaignes, Do-
a., in letzter Zeit auch
hi bestätigt worden sind,
hl hier nicht näher ein-
namentlich die Unter-
d seiner Mitarbeiter ge-
nt, dieselben bilden auch
isches Beweismaterial für
ik und insbesondere für
enden Theorien.
mir seinerzeit geäußerten
der Existenz und der Art
gung an Teilchen, die in
voll bestätigt worden

sagten, ahnten wir gar nicht, daß sich das Exponentialgesetz und der Wert des Exponenten mittels der einfachen und sinnreichen, kurz nachher von Perrin angewendeten Versuchsmethoden so genau kontrollieren und bestätigen lassen würden, daß dies sogar eine der genauesten Bestimmungen der Avogadroschen Konstante N ermöglichen würde.

§ 8. Der normale Fall eines stabilen Gleichgewichts entspricht offenbar einer in ε quadratischen Gestalt der Potentialfunktion $\chi(\varepsilon)$, also z. B. einer elastischen, in die Ruhelage zurücktreibenden Kraft. In diesem Falle sind zufolge Formel (4) die molekularkinetischen Abweichungen von der normalen Gleichgewichtslage nach dem Gaußschen Fehlergesetz verteilt, und die mittlere Abweichungsarbeit beträgt

$$\overline{A} = \frac{1}{2}\frac{H\Theta}{N} = 2{,}05 \cdot 10^{-14} \text{ Erg.}$$

Als Beispiel führen wir vor allem die schon vorher erwähnten Schwankungen[1]) der Gasdichte um den normalen Mittelwert an. Die bei (isothermer) Kompression vom spezifischen Volum v auf den Normalwert v_0 geleistete Arbeit beträgt nämlich pro Masseneinheit einer Substanz, welche einem äußeren Druck p_0 unterliegt,

$$\left.\begin{aligned}\int_v^{v_0}(p-p_0)\,dv = \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_0 \frac{(v-v_0)^2}{2} + \\ + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_0 \frac{(v-v_0)^3}{3!} + \left(\frac{\partial^3 p}{\partial v^3}\right)_0 \frac{(v-v_0)^4}{4!} + \cdots\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Wird das Verhältnis der Anzahl der momentan in einem gewissen Volum V befindlichen Moleküle n zu der auf dasselbe Volum entfallenden Normalzahl ν mit $\frac{n}{\nu} = 1 + \delta$ bezeichnet, so folgt aus obigen Formeln bei Beschränkung auf das erste Glied der Reihe (6), daß das mittlere Quadrat der positiven oder negativen Verdichtung

$$\overline{\delta^2} = \frac{H\Theta}{N}\frac{\beta}{V} \qquad (7)$$

beträgt, wo β den isothermen Kompressibilitätskoeffizienten $\beta = -\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}$ bedeutet.

Im Falle der Gültigkeit des Boyle-Charlesschen Gesetzes reduziert sich diese Formel auf die einfache, schon vorher erwähnte (2) Gestalt $\overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}$; sonst müssen natürlich molekulare Anziehungskräfte die Neigung zu Schwarmbildung vermehren, dagegen müssen die Eigenvolumina der Moleküle oder überhaupt abstoßende Kräfte im entgegengesetzten Sinne wirken.

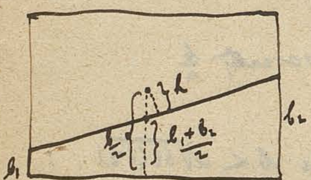
Interessant ist auch der Fall, wo dem

$b_2 = b_1 + a\,tg\varphi$ $\qquad b_1 + \frac{a}{2}\,tg\varphi = \varepsilon b$

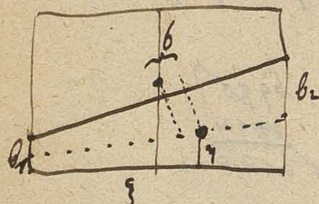
$\frac{b_2+b_1}{2}\,a = \varepsilon a b$ $\qquad b_1 = \varepsilon b - \frac{a}{2}\,tg\varphi$ $\qquad b_2 - b_1 = a\,tg\varphi$

$b_2 = \varepsilon b + \frac{a}{2}\,tg\varphi$

$F = a b \varepsilon$



$$h = \frac{b - b_1 - b_2}{2}\cos\varphi$$



$$\sigma = \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi - b_1\sin\varphi - \frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{a^2+(b_2-b_1)^2}}_{=\frac{a}{\cos\varphi}} - h\,tg\varphi$$

$$\sigma = \xi\cos\varphi - \frac{a}{2\cos\varphi} + \sin\varphi\left\{\eta - b_1 - \frac{b}{2} + \frac{b_1+b_2}{2}\right\}$$

$$\xi = \frac{2a}{3}\,\frac{b_2 + \frac{b_1}{2}}{b_1+b_2} = \frac{2a}{3}\,\frac{\frac{3\varepsilon b}{2} + \frac{a}{4}\,tg\varphi}{2\varepsilon b} = \frac{a}{2} + \frac{a^2\,tg\varphi}{12\varepsilon b}$$

$$\eta = \frac{b_1}{2} + \frac{\xi}{a}\,\frac{b_2-b_1}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon b}{2} - \frac{a}{4}\,tg\varphi + \frac{\xi}{2}\,tg\varphi = \frac{\varepsilon b}{2} - \frac{a}{4}\,tg\varphi + \frac{a}{4}\,tg\varphi + \frac{a^2}{24\varepsilon b}\,tg^2\varphi$$

$$\sigma = \frac{a\cos\varphi}{2} + \frac{a^2}{12\varepsilon b}\,tg\varphi\cos\varphi - \frac{a}{2\cos\varphi} + \sin\varphi\left\{\frac{\varepsilon b}{2} + \frac{a^2\,tg^2\varphi}{24\varepsilon b} - \frac{b}{2} + \frac{a\,tg\varphi}{2}\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left[\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi} + \sin\varphi\,tg\varphi\right](\varepsilon-1)\frac{b}{2}\sin\varphi + \frac{a^2}{12\varepsilon b}\sin\varphi\left[1 + \frac{tg^2\varphi}{2}\right]$$

$$\sigma = \sin\varphi\left[(\varepsilon-1)\frac{b}{2} + \frac{a^2}{12\varepsilon b}\left(1 + \frac{tg^2\varphi}{2}\right)\right]$$

stačí aby $\frac{a^2}{6\varepsilon b} > b$

$a > b\sqrt{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$

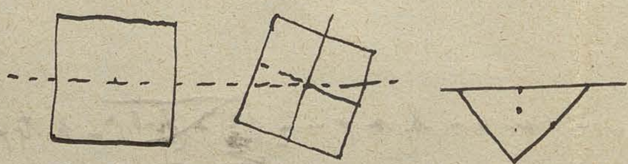
Stała równowaga o ile

$b > a\sqrt{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$

jeżeli $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$b > a\sqrt{\frac{3}{2}}$ więc kwadrat byłby niestały!?

Stałość jednak wzrasta z kątem φ, natomiast tylko wzrasta aż do $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$



a zatem o ile $b < a\sqrt{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$

pozycja nachylona byłaby stała!

dla $a=b$ stałe dopóki $\varepsilon - \varepsilon^2 < \frac{1}{6}$

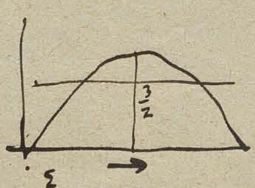
$\varepsilon^2 - \varepsilon = -\frac{1}{6}$

$\varepsilon = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{4}{6} + \frac{1}{4}}$

$\varepsilon = +\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{12}} =$

$\varepsilon = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12}}$

$= 0.\quad 4$



6990
0792
1 6198 −2
0·8099 −1
0·6454
−0·5
$\varepsilon = 0{\cdot}1454$

1·0792
0·5396
0·4604 −1

0·5
0·2886

Punkt opisuje lemniskatę ze stałą prędkością ręczną [?] jaka siła ?

$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$

$r\dot r = -a^2 \sin 2\varphi \cdot \dot\varphi$

$r^2 \dot\varphi = c$

~~$r^3 \dot r = -a^2 c \sin 2\varphi$~~

$3r^2\dot r^2 + r^3 \ddot r = -2a^2 c \cos 2\varphi \cdot \dot\varphi$

$= -2c r^2 \dot\varphi = -2c^2$

~~$\ddot r - r\dot\varphi^2 = \ddot r$~~

$\ddot r = -\dfrac{2c^2 - 3r^2\dot r^2}{r^3} - \dfrac{c^2}{r^3}$

$F_r =$

$= -\dfrac{3}{r^3}\left(c^2 + \underbrace{r^2\dot r^2}\right)$

$a^4\dot\varphi^2 \sin^2 2\varphi$

$a^2\dot\varphi^2 (a^2 - r^2)$

$c^2 + a$

P. Weber

Zasada najmniejszego działania (Hamiltonowska)

" " przymusu (Gauss)

Mach

Skręt i przegięcie belki według Saint Venanta

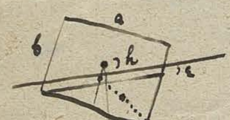
Symetryczne deformacje warstwy kulistej lub walcowatej

Wypadki ciśnień i dyspersja [illegible] konstrukcja rotora

Teorja sprężystości {
Kirchhoff, Neumann

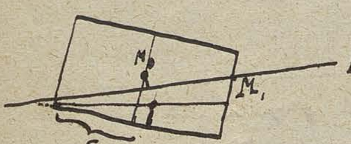
$$\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\left[1+\frac{a\varphi}{3(b-2h)}\right]$$

$$+ \frac{b}{2}\varphi - \left(\frac{b}{2}-h\right)\frac{\varphi}{2}$$



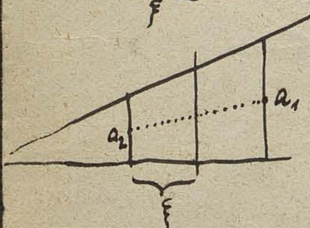
$$b\xi - \frac{b^3}{12\xi} \qquad \frac{b}{2}(\ldots) - \frac{a^3}{12\,a\,b\mu}$$

$$a > b\mu\sqrt{6} \qquad \frac{1}{b\mu}\left[\frac{b^2}{2}\mu^2 - \frac{a^2}{12}\right] \qquad \frac{1}{2b\mu}\left[b^2\mu^2 - \frac{a^2}{6}\right]$$



$M_1 =$

$$y = a_2 + (a_1 - a_2)\frac{x}{b}$$



$$\xi = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{a_2\frac{x^2}{2} + (a_1-a_2)\frac{x^3}{3b}}{a_2 x + \frac{a_1-a_2}{b}\frac{x^2}{2}} = \frac{a_2\frac{b^2}{2} + (a_1-a_2)\frac{b^2}{3}}{a_2 b + \frac{(a_1-a_2)b}{2}}$$

$$p = \frac{b}{2}\sin\varphi + \frac{a}{2}\cos\varphi - \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi$$

$$\xi = b\,\frac{\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{6}}{\frac{a_1+a_2}{2}} = \frac{2b}{3}\,\frac{a_1 + \frac{a_2}{2}}{a_1+a_2}$$

$$\eta = a_2 + (a_1 - a_2)\frac{2}{3}\,\frac{a_1 + \frac{a_2}{2}}{a_1+a_2}$$

$$a_1 = \frac{b}{2} - h\cos\varphi + \left(\frac{a}{\cos\varphi} - h\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\sin\varphi$$

$$a_2 = \frac{b}{2} - h\cos\varphi - \left(\frac{a}{\cos\varphi} + h\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)\sin\varphi$$

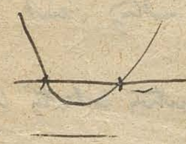
$$a_1 + a_2 = b - 2h\cos\varphi - 2h\,\mathrm{tg}\,\varphi\sin\varphi = b - \frac{2h}{\cos\varphi}$$

$$\left(K + m r^2\right)\omega = c \qquad \frac{c^2}{\left(K+mr^2\right)^2} = \frac{\alpha}{m r^3}$$

$$r\omega^2 = \frac{\alpha}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\omega^2}}$$

$$K\omega + m\omega\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\omega^4}} = c$$



$$K\omega + m\sqrt[3]{\alpha^2}\cdot\omega^{-\frac{1}{3}} = c$$

$$K\Omega + m r^2\omega = c$$

$$r\omega^2 = \frac{\alpha}{r^2} \qquad K\Omega + m\omega\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\omega^4}} = c$$

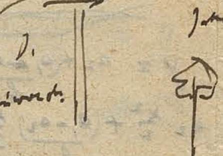
$$m\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}}{\sqrt[3]{\omega}} = c - K\Omega$$

$$\omega = \left[\frac{m\sqrt[3]{\alpha^2}}{c-K\Omega}\right]^3$$

$$K\frac{d\Omega}{dt} = -\beta\,\frac{(\Omega-\omega)}{r^3}$$

$$K\Omega + m r^2\omega = c$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{\omega^2}}$$



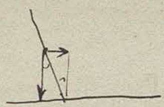
D. [illegible]

Jakie prędkości $q =$ [illegible] jeśli wytrzymałość stali

Jeśli obrączkę [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]

[illegible]

Chłopiec ślizgający się po lodzie, jakie nachylenie



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{P} = \varepsilon$ (współczynnik tarcia)

$M\frac{d^2x}{dt^2} = -\varepsilon M g$

jednostajnie opóźniony

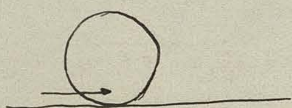
$-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}$

$\int 2\pi r^2 r^2 \sin^3\varphi \, dr\, d\varphi$

$= 2\pi \frac{a^5}{5} 2(\frac{2}{3}$

$= \frac{8}{15} a^5 \pi = \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{2}{5} a^2$

$M\frac{d^2x}{dt}$



Kula rzucona z prędkością postępową c
obrotową ω

$M\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon M g$ $\qquad v = c - \varepsilon g t$

$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon M g a$ $\qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega - \varepsilon g \frac{Ma}{K} t$

wypadkowa prędkość: $v - a\frac{d\varphi}{dt}$

w razie jeśli w chwili $t = \frac{c}{\varepsilon g}$ kula jeszcze posiada ruch wirowy obrotowy, to znaczy jeśli

$\omega - \varepsilon g \frac{Ma}{K}\frac{c}{\varepsilon g} > 0$ to kula pójdzie jeszcze wstecz

$\omega K > Mca$

(?)

tarcie będzie istnieć dopóki $v = a\frac{d\varphi}{dt}$ $\qquad c - \varepsilon g t = a(\omega - \varepsilon g \frac{Ma}{K} t)$

odtąd ~~rusza się~~ wstecz z prędkością $\qquad t = \frac{c - a\omega}{\varepsilon g\left[1 - a\frac{Ma}{K}\right]}$

$v = c - \frac{c - a\omega}{1 - \frac{a^2M}{K}} = \frac{a\omega - a c\frac{Ma}{K}}{1 - \frac{a^2M}{K}} = a\frac{\omega - \frac{Mca}{K}}{1 - \frac{Ma^2}{K}} = ac\frac{\frac{\omega}{c} - \frac{Ma}{K}}{1 - \frac{Ma^2}{K}}$

Uderzenie excentryczne w punkcie b ponad O

~~$= a\omega + a\frac{M}{K}\frac{c - a\omega}{1 - a\frac{M}{K}} = c\,\frac{\omega - \omega\frac{M}{K} - c\frac{M}{K} + \frac{M\omega}{K}}{1 - \frac{Ma}{K}}$~~

$M c = \int F dt$

$K\omega = b\int F dt$

$\frac{Mc}{K\omega} = \frac{1}{b}$ $\qquad \frac{\omega}{c} = \frac{M}{K} b$

$K = \frac{2Ma^2}{5}$

$\frac{M}{K} = \frac{5}{2a^2}$

$v = ac\frac{M}{K}\frac{b-a}{1 - \frac{Ma^2}{K}}$

$v = \frac{5c}{2a}\frac{b-a}{1-\frac{5}{2}} = c\frac{(1-\frac{b}{a})}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5c}{3}(1-\frac{b}{a})$

Balansowanie laski

tym łatwiejsze, czym mniejsze poziome przesunięcie środka ciężkości w danym czasie

a

Początkowy stan: środek ciężkości niedokładnie pod tym punktem, początkowe zboczenie δ

$$\frac{1}{2}K\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = Mga(\cos\varphi_0-\cos\varphi)$$

$$= Mga\,\frac{\varphi^2-\varphi_0^2}{2}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-\varphi_0^2}} = \sqrt{\frac{Mga}{K}}\,dt$$

$$a\varphi_0=\delta$$

$$a\varphi=\varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon-\delta}{t}$$

$$K\ddot{\varphi} = Mga\varphi$$

$$\varphi = Ae^{\alpha t}+Be^{-\alpha t}$$

$$A=B=\frac{\varphi_0}{2}\quad\begin{cases}\varphi_0 = A+B\\ 0 = A-B\end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{2}\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)$$

$$\frac{\varepsilon-\delta}{t} = \frac{a(\varphi-\varphi_0)}{t} = \frac{a\varphi_0}{t}\left(\frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}-1\right)$$

$$= a\varphi_0\,\frac{\alpha^2 t}{2} = \delta\,\frac{\alpha^2}{2}t$$

$$\alpha^2 = \frac{Mga}{K}$$

miarą stałości jest zatem $\frac{K}{Ma}$

dla pręta jednorodnego $K=\frac{a^3}{3}\rho g$, $M=a\rho g$ $\rightarrow = \frac{a}{3}$

czym dłuższy tym łatwiej balansować

Porównajmy z tym ciężar przy samym końcu umocowany: $K=a^2M$

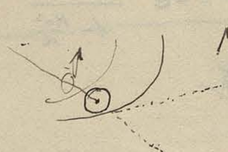
$$\frac{K}{Ma} = a$$

zatem tyle razy korzystniej, tak jak laska 3 razy tak długa.

Wagon kolejowy kiedy się wywróci na krzywiźnie

lub też nachylenie szyn

Siły odśrodkowe obracania koła



$$M = K\frac{v}{R}\frac{v}{r} = Pl$$

jeśli tylko obręcz $K = 2Pr^2$

$$\frac{2v^2r}{Rl}$$

$$v=\sqrt{\frac{Rl}{2r}}$$

$r=100$

$R=20000$

$l=143.5$

$$= 37.5\ \frac{m}{sec}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$x = \ldots$ $\qquad L + U = \text{const}$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + b\cos pt$$

$$x = a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{b}{k - mp^2}\cos pt \qquad p = \frac{2\pi}{T} \qquad \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0} \qquad d(L+U) = dP$$

$T = T_0 \qquad x = \infty$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \rho\frac{dx}{dt}$$

$$x = A\,e^{-\frac{\rho}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\rho^2}{4m^2}}\,t + \varepsilon\right) = A e^{-\alpha t}\cos(\beta t + \varepsilon)$$

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4km}} \mp \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\left[1 - \frac{\rho^2}{8km}\right]\ldots$$

maxima $\frac{dx}{dt} = 0$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{ctg}(\beta t + \varepsilon)$$

$$\alpha = \frac{1}{T}\log\frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -ks - \rho\frac{ds}{dt} + E\cos pt$$

$$s = A\cos(pt - \varepsilon)$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\rho p}{k - p^2} \qquad \text{if } n_f \gtrless n_0 \quad \begin{matrix}\pi > \alpha > \frac{\pi}{2}\\ \frac{\pi}{2} > \alpha > 0\end{matrix} \qquad n_f = n_0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \frac{E}{\sqrt{(k - p^2)^2 + \rho^2 p^2}}$$

$$V = \frac{S}{a}(x_1 x_2 \ldots)$$ $$W = \frac{S}{2a}\left(y_1^2 + (y_2-y_1)^2 + (y_3-y_2)^2 \ldots + y_n^2\right)$$

$n=2$. $$W = \frac{S}{a}\left[\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2\right]$$

$$T = m\left[\left(\frac{\dot y_1+\dot y_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\dot y_1-\dot y_2}{2}\right)^2\right]$$

~~$\nu = \sqrt{\frac{2S}{ma}}\,(\ldots)$~~

$$\nu = 2\sqrt{\frac{S}{ma}}\,\sin\frac{k\pi}{2(n+1)} = \sqrt{\frac{c_n}{a_n}}$$

$$\frac{c_k}{a_k} = \frac{S}{ma}\sin^2\frac{k\pi}{2(n+1)}$$

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot y_1^2 + \dot y_2^2 + \ldots\right] \qquad W = \frac{S}{2a}\left[y_1^2 + (y_2-y_1)^2 + (y_3-y_2)^2 \ldots y_n^2\right]$$

$$m\frac{d^2y_k}{dt^2} = +\frac{S}{a}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1})$$

$$y_k = A_k\cos(nt-\varepsilon)$$

$$-mA_k n^2 = -\frac{S}{a}\left[A_{k-1} - 2A_k + A_{k+1}\right]$$

$$A_k = P\sin k\beta = P\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}h\right) \qquad h = 1, 2, 3 \ldots n$$

$$-\frac{man^2}{S}\sin k\beta = \sin(k-1)\beta - 2\sin k\beta + \sin(k+1)\beta$$
$$= 2\sin k\beta\cos\beta - 2\sin k\beta$$

$$\frac{man^2}{2S} = -(\cos\beta - 1) = 2\sin^2\frac{\beta}{2}$$

$$n = 2\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{S}{am}} = 2\sin\frac{\pi h}{2(n+1)}\cdot\sqrt{\frac{S}{am}}$$

wahania statku $K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a \sin \alpha t - S\varphi$ 142

$K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -S\varphi$

$\varphi = A \sin \gamma t \; ; \; \gamma = \sqrt{\frac{S}{K}}$

$S = K\gamma^2$

$$\varphi = -\frac{a}{K\alpha^2 - S} \sin \alpha t +$$

$$= -\frac{a}{K(\alpha^2 - \gamma^2)} \sin \alpha t + A \sin \gamma t$$

ale swobodne drgania zanikają z czasem jeśli ślady tarcia

łódź kołysze się (z falami) i może się wywrócić

statek skręci ku falom i zostaje przez nie zalewany

dla $\alpha = \gamma$ resonancya i maximum

Struna drgająca

[illegible] i dzwon

~~membrana~~ Błona (telefonu, fonografu); nie dobra jeśli własny ton w środku

---

Absorpcya światła

Fale przypływu: przypływ morza

Teorya Kundtowa

-- . .

· Drgania kuli płynnej koło kształtu równowagi

czas dla płynnej kuli $1^h 34$

z powodu zmniejszenia $1^h 30 - 2^h$

gdyby czas obrotu 4^h to resonancya

powstanie księżyca (Darwin)

Wahanie się ziemi koło osi

Nutacya swobodna i wymuszona

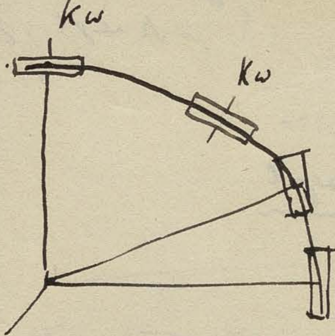
Chandler 305 teoret. dla sztywnej kuli

427 (rzeczywisty) nie stał, $r = 4{\cdot}5\,m$

zmiany nieregularne

jaja wirujące

Archimedes



$K\omega$

K ~~ω cos φ~~

$$M_x = \frac{d}{dt}\left(K_x \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$$M_y =$$

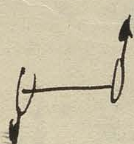
$$M_z =$$

$$M_x = \frac{K\omega\,(1-\cos\varphi)}{dt}$$

$$M_y = K\omega \frac{\sin\varphi}{dt} = K\omega \cdot \frac{v}{R}$$

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad = K\frac{v^2}{rR} = l\,P_1$$

$$= l\,P_2$$



$$K = 2\; r^2 M$$

$$P = Mg$$

$$\frac{r^2 M v^2}{l\,r R} \geq Mg$$

$$2\,\frac{r\,v^2}{lR} \geq g$$

$r = 1\,m$

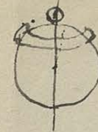
$R = 200\,m$

$l = 1{\cdot}435$ $\qquad v = 37{\cdot}5\ \frac{m}{sec}$

$$tg\,\gamma = \frac{b^3 n a \tau . l}{3\lambda}\,\frac{1}{K\omega}$$

K zemi $\frac{2}{5} M a^2$

$\frac{2}{5}(6\cdot3)^5 \, \frac{4}{3}\pi \; 5\cdot6 \, . \, 10^{30}$



$K\Omega + k\omega - K_0\Omega_0$

K Golfstrom:

$60.10^3. \, 400 . 2\left(\frac{6\cdot3}{2}\right)^3 . 10^{18} . \pi$.

$\frac{8\,km}{h} = \frac{6300}{2}\pi$

$\frac{~~6300~~ \; 800 . \pi \; 2000}{~~2 . 8 . 24~~ \; 48} = 50$ dní

$\frac{10^{24}\,\pi . \frac{243}{32}(6\cdot3)^3}{10^{30}\,\pi \; \frac{8}{15} \, 5\cdot6 . (6\cdot3)^5 . 50} =$

$\frac{45 . 1}{~~32 . 5\cdot6~~ . (6\cdot3)^2 \; 5 . 10^7} = \frac{1}{10^{10}}$!

45 . 45   40   800

= 1 mm !

Zima na [illegible] polokouli

$\frac{8\delta . a^2\pi \left(\frac{a}{3}\right)^3}{\frac{4}{3} a^3 \pi . \frac{2}{5} a^2 . 5\cdot6} = \frac{1}{36}\frac{\delta}{a} = \frac{10^{-7}}{25}\delta$

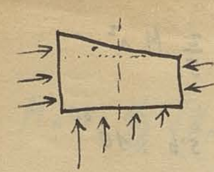
přemístění [illegible]

$\frac{2\delta a\pi \frac{a}{3} . a^2}{\dots} = \frac{1}{4}\frac{\delta}{a} = \frac{10^{-7}}{4}\delta$

$-\varphi = \int \frac{M_x \, dt}{K\omega}$ $m a^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} =$

Chandler 428^d : 4·5 m

zamrzá 305   [illegible] jak stále



$moment = \frac{b.\ \Delta y}{12} \neq \frac{b^2}{12}\frac{dy}{dx}$

$y = \int \frac{M_x dx}{K\omega}$

$= \frac{b^2}{12}\frac{1}{K\omega}\int \frac{dy}{dx} dl$

$\frac{2\pi a}{\lambda}\int \cos(2\pi\ )$

$2\pi a \frac{\tau}{\lambda} \sin 2\pi$

$y = a \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right)$

$= \frac{b^2}{3}\frac{\pi a \tau}{\lambda}\frac{1}{K\omega}$

$\lambda = 40m$

$\tau = 5 sec$

$b = 10m$ $l = 100m$ długości

$a = 2m$ (wysokość 7m

$\left(\begin{matrix} a = 8m \\ \lambda = 150 \end{matrix}\right.$ wysokość 16m) $\tau = 10 sec$

$= \pi \frac{10^6 .\ 200 .\ 5}{3.\ 4.10^3} = \frac{\pi\ 10^9}{12.10^3} \neq \frac{\pi . 10^5}{K\omega}$

$\neq \frac{1}{60}$ | 1°!

$K\omega = 60.\ \pi\ 10^5 . \rho = \frac{2\pi}{n} .\ 2\pi q a^3 . \rho . 10^4$

$n = 100$

$a = 2m = 10^2 . 2$

$K\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a \sin\alpha t - S\varphi$

$\varphi = A \sin\alpha t$

$-KA\alpha^2 = -SA + a$

$A = \frac{-a}{K\alpha^2 - S}$

albo ±

wzmocnienie fali

$\alpha \geq \sqrt{\frac{S}{K}}$

okres wahania swobodnego $2\pi\sqrt{\ }$

jeśli szybsze to −A przeciwny

powolne to . +A równ

Kanał(?) Kowalewskiego(?)

$q = \frac{6.\ 10^6 .\ 10.}{4\pi .\ 10^6 . 8} = \frac{5}{\rho . 8} . 10^3 \neq 10^2 = (1 dm)^2$

można jeszcze dodać + B sin(γt + δ); $\gamma = \sqrt{\frac{S}{K}}$

ale uśmierzone przez tarcie

mały statek szybszy; zatem który rośnie z falami

daje przeciwnie

A = ∞ jeśli równe

$\varphi = +\mu\theta$ koła

$= +\mu \arcsin\frac{x}{r}$

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{+\mu}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right) = +\mu\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{r^3} = \frac{\mu}{r^2}\frac{y}{r}$$

$$\omega = \frac{1}{r^2}$$

$\psi = +\mu \lg r$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x} = +\frac{\mu}{r}\frac{x}{r} = +\frac{\mu}{r}\cos\theta$$

Naturalnie ponieważ $2\pi r V = const$ = siła źródła

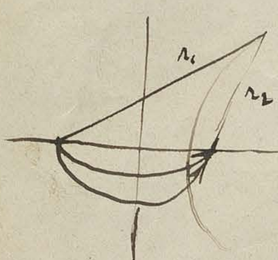
dla $r=0$

$V = \infty$

Jeśli $\psi_1 = \mu\lg r_1$, $\psi_2 = -\mu \lg r_2$ } $\varphi = \varphi_1+\varphi_2 = \mu(\theta_1-\theta_2)$ = koła

to summa także zadość czyni

$+(i\theta_1 - i\theta_2) = c$



$$\psi = \mu\lg\frac{r_1}{r_2} = c = \frac{\mu}{2}\lg\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$\text{arc tg}\frac{y}{x-a} - \text{arc tg}\frac{y}{x+a} = c$$

$$\frac{\frac{y}{x-a}-\frac{y}{x+a}}{1+\frac{y^2}{x^2-a^2}} = \text{tg}\,c = \frac{y(x+a)-y(x-a)}{x^2-a^2+y^2}$$

$(x-a)^2+y^2 = C[(x+a)^2+y^2]$

koła

$f(z) = \lg\frac{z+a}{z-a}$

zatem woda gromadzi się! [illegible]

Podwójne źródło jeśli lim $a=0$:

$$\lg\frac{1-\frac{2ax}{x^2+y^2}}{1+\frac{2ax}{x^2+y^2}} = \lg\left[\frac{1-2a\cos\theta}{1+2a\cos\theta}\right] = -2a\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned}\lg\frac{1-x}{1+x} &= -x-\frac{x^2}{2} - \\ &+x-\frac{x^2}{2}+\end{aligned}\right\} = -x^2$$

$\cos^2\theta = const$

odzwierciedlenie! źródła i wypływy!

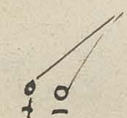
~~Ruch ...~~

W przestrzeni:

$$4\pi r^2 V = \text{const} = 4\pi m$$

$$V = \frac{m}{r^2} \qquad \left(\varphi = -\frac{m}{r}\right)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = m\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \text{const}$$



jeśli bardzo blisko

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m}{r_1}\right)\Delta x = \Delta x \frac{m}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{\overbrace{m\Delta x}^{\mu}}{r^2}\cos\theta$$

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\overbrace{m\Delta x}^{\mu}\right) = \dots$$

$$u = \frac{1}{r^3}(1 - 3\cos^2\theta)$$

$$v = \frac{1}{r^3}\,3\sin\theta\cos\theta$$

$$u\cos\theta + v\sin\theta = \frac{1}{r^3}(\cos\theta - 3\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta) = \cos\theta\,\frac{-2}{r^3}$$

$$\varphi = \frac{x}{r^3} \qquad \frac{1}{r} \qquad \frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{3xy}{r^5}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{r^2 - 3x^2}$$

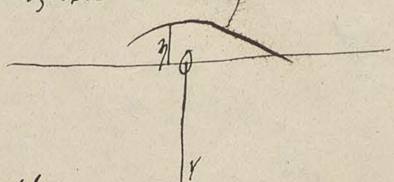
$$(y^2 - 2x^2)\,dy = 3xy\,dx$$

Kirchhoffa promienie cieczy, etc. (dwuwymiarowe)

Ruch wirowy w cieczy idealnej etc.

Ruch falowy w kanale

Jeśli w początku zaczynają siły g etc. to będzie niewirowy



$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{p}{\rho} + gy \mp \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \dots\right] \text{ zaniedbujemy}$$

Dla powierzchni $p = 0$ więc $\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=\eta}$

$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = f(x\,y\,t)$

jeśli η będzie małe

to $f(x\,\eta\,t) = f(x\,0\,t)$

$$\eta = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{y=0}$$

Green

Airy

Stokes

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v\Big|_{y=0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{y=0} \qquad \text{więc} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$$

Ruch periodyczny więc przypuszczenie

~~$\varphi = (A \cos at + B \sin at)\, f(x, y)$~~

~~$-a^2 f - g\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ dla $y = h$~~

~~$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{a^2}{g}$ więc $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $y = h$~~

~~$f = \Sigma (M \cos \beta x + N \sin \beta x)\, F(y)$~~

N. p.

~~$f = \cos \beta x \quad F(y)$~~

~~$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{a^2}{g}$~~

Wstawiając to do $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

$$-\beta^2 F + \frac{d^2 F}{dy^2} = 0$$

$$F = \left(G e^{-\beta y} + H e^{+\beta y}\right)$$

Na dnie t. j. $y = h$: $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$

zatem

$$-G e^{-\beta h} + H e^{\beta h} = 0$$

$$H = G e^{-2\beta h} = K e^{-\beta h}$$

$$G = K e^{\beta h}$$

$$F = K\left[e^{\beta(h-y)} + e^{-\beta(h-y)}\right]$$

$$-\alpha^2 \Phi = g \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\varphi = \cos(\alpha t - \beta x)\, F(y)$$

$+ \sin \frac{\partial \varphi}{\partial x}$

Warunek dla powierzchni $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - g \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$

$$-\alpha^2 F - g \frac{\partial F}{dy}\Big|_{y=0}$$

$$-\alpha^2 \left[e^{-\beta h} + e^{\beta h}\right] - g\beta\left[-e^{\beta h} + e^{-\beta h}\right] = 0$$

$$\alpha^2 = g\beta \frac{e^{-\beta h} - e^{\beta h}}{e^{-\beta h} + e^{\beta h}}$$

zatem $\varphi = K\left[e^{\beta(h-y)} + e^{-\beta(h-y)}\right] \cos\beta x \left[A \sin\alpha t + B \cos\alpha t\right]$

$\eta = \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0}$: $\eta = K\left[e^{-\beta h} - e^{\beta h}\right] \cos\beta x$ ~~$[A \sin\alpha t + B \sin\alpha t]$~~ $\sin\beta x \sin\alpha t$

zamiast tego także

$C \sin(\alpha t - \beta x)$

~~Jeśli~~

gdzie $\alpha t - \beta x$ = const oznacza

$\frac{x}{t} = \frac{\alpha}{\beta}$ = prędkość fal

$$a = \sqrt{\frac{g}{\beta} \cdot \frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{e^{\beta h} + e^{-\beta h}}}$$

Długość fal oznaczona przez warunki przegtkowe, gdyby były fale stojące to w najmniejszej długości L

warunki $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ $x = \begin{cases} L \\ 0 \end{cases}$

ale jeśli wstawimy długość najmniejszą to zależy to tylko od warunków przegtkowych

długość fali: $\beta\lambda = 2\pi$ $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\eta = K\left[e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{+\frac{2\pi h}{\lambda}}\right] \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\left[\cdots\right]$$

teraz jeżeli h bardzo wielkie ~~[illegible]~~ w porównaniu do λ to

$$\eta = -K e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \ldots$$

$$a = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

Jeżeli h bardzo małe: $e^{\rho h} - e^{-\rho h} = 1 + \rho h - (1 - \rho h) = 2\rho h$

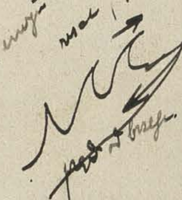
$$a = \sqrt{\frac{g}{\rho}\,\frac{2\rho h}{2}} = \sqrt{gh}$$ więc niezależnie od długości fal

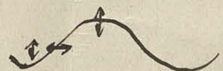
n. p. λ in feet

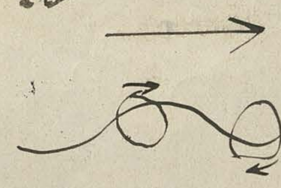
h (feet)	1	100	10000
1	2·26	5·67	5·67
100	2·26	22·62	56·7
10000	2·26	22·62	226·2

h = 3000 m
ρ = 10 m
a = 200 m
200.86.000
= 2?.10⁷ m
~~[illegible]~~

fale trzęsień ziemi: [illegible] wzrost do brzegu płytkiego zwiększanie energii na płytszej wodzie [illegible] przy brzegu







Rozkład w cieczy samej:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}} =$$

$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

dla stojących

$$\frac{d\xi}{dt} = u = +\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\rho\varphi \frac{\sin\rho x}{\cos\rho x}$$

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \rho\varphi\,\frac{e^{-\rho(h-y)} - e^{\rho(h-y)}}{e^{-\rho(h-y)} + e^{\rho(h-y)}}$$

$$x = \int u\,dt = -\frac{\rho}{\alpha}\frac{\sin\rho x}{\cos\rho x}\varphi$$

$$y = \frac{\rho}{\alpha}\frac{e}{\ldots}\varphi$$

dla postępujących

$-\rho \cos(\alpha t - \rho x)$

$\ldots \sin(\alpha t - \rho x)$

$\frac{\rho}{\alpha}\sin(\alpha t - \rho x)$

$\frac{\rho}{\alpha} e^{\ldots} \cos(\alpha t - \rho x)$ } zatem elipsa

więc a ~~[illegible]~~ połowa dla wszystkich y ale b zmniejsza się o osiach $a = \frac{\rho}{\alpha}$, $b = \frac{\rho}{\alpha} e^{-\ldots}$

jeżeli zaś h bardzo wielkie to prawie koła

[illegible] płytko [illegible] 0·004

Tutaj przekroju postępowa[...] zaliczana od tutaj (zasadn. różnica względem fal stoj. drgającej)

Tylko dla bardzo dużych fal jak wszelkie, przypadki i odstępy musi się nie zaliczać

analiza harmoniczna, periodyczne siły.

$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ $\qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0$

$\eta =$

$\zeta =$

To znaczy że istnieje potencjał wektorowy

$F = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\xi}{r} \, dx\, dy\, dz$

$u = \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}$ etc.

elektromagnet. analogia

$\omega \parallel i$

ξ, η, ζ — składowe prądu elektr.

u, v, w — sił magnet.

Analogia. Ograniczono się aż dotąd na najprostszy przypadek jaki prawie liniowe wiry t.j. że w całej przestrzeni z wyjątkiem drutu etc. Tak samo jak w elektr.

Linie wirowe, strugi wirowe — wiry elementarne

przężenie = $2\pi r . r\omega = 2q\omega$

$= [\ldots]$

$AA' + A'O' + OO' + O'A = 0$

$AA' = OO'$ zatem $q\omega =$ const

$q\omega =$ natężenie wiru

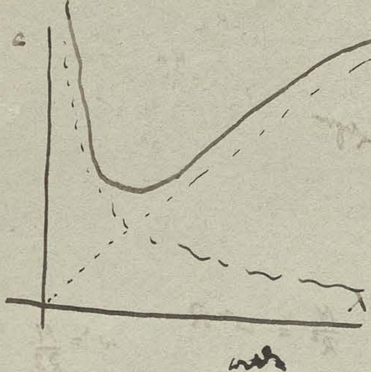
Influence of capillarity $p = T\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + gy - T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \qquad -T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + g v - T\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - g\frac{\partial\varphi}{\partial y} + T\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

$$-\alpha^2 F - \frac{dF}{dy}\left(g + T\beta^2\right) = 0$$



Minim. vel. $v_m = 23{\cdot}2$ cm

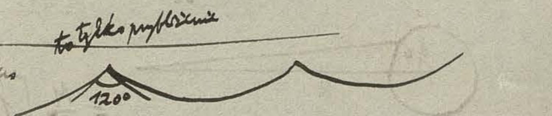
$\lambda_m = 1{\cdot}73$ cm

fale w obrębie krótkiej
poruszaniu się
mierzeniu ...

Ruch cząstek w fali   Ellipsy

Fale trochoidalne (Gerstner 1802, Rankine) inne: Stokes

to tylko przybliżenie



Jak wiatr wzbudza fale?

wiatr popycha, porywa ...

dopóki jego prędkość większa

breakers, Katzen,

najsłabszy wiatr który wogóle może wzbudzić fale 23·2 $\frac{cm}{sec}$

(nierówności ... miejsca i zmarszczone)

wciąż być się porywanymi, gdy tylko nie lepkości

... zmniejszają się wpływ lepkości $\propto \frac{\mu}{\rho\lambda^2}$ dlatego mniejsze fale wiatr szybciej ... fale najsilniejsze!

Jak wiatr wzbudza fale (... nie wzbudza ale porywa raz wzbudzone)

wiatr	zmierzone λ	A	v	τ
16 $\frac{m}{sec}$	148 m	7·8 m	15 $\frac{m}{sec}$	10 sec
7	35	2	7	5

średnio ... 5 m maksym.

wogóle maks. 11·5

Helmholtz

Energie d. H. ...

Wolkenwellen

~~Fale sprowadzane innym sposobem~~

wzruszenie kamieniem

Stoj waves

kostka w wodzie

wędka

fale w strumieniach płynących

$U = \frac{M\kappa}{2}$

$-\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{M\kappa}{r^2}$

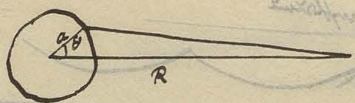
$-\frac{\partial U}{\partial r} = -$

$\frac{M}{R^2} = \omega^2 R \qquad \omega^2 = \frac{M}{R^3}$

nie prawda, ziemia nie wiruje jako całość sztywne koło ⊙ tylko w całości siła odśrodkowa

Zadan.

$$U = \frac{\kappa M}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} - \frac{\omega^2}{2}(R - a\cos\theta)^2$$

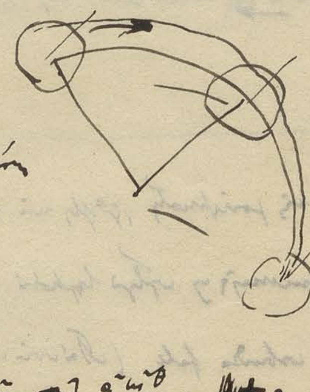


$$= \frac{M}{R}\left[\left(1 - 2\frac{a}{R}\cos\theta + \frac{a^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{R}\cos\theta\right)^2\right] =$$

$$= \frac{M}{R}\left[1 - \frac{a\cos\theta}{R} + \frac{a^2}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2\cos^2\theta}{R^2}\right] - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2a}{R}\cos\theta + \frac{a^2\cos^2\theta}{R^2}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

$$= \frac{M}{R}\left[\frac{1}{2} + \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^2\cos^2\theta}{R^2}\right.$$



całość sztywne wiruje tak że równolegle do siebie:

każdy punkt opisuje koło jednakowe, z jednakową prędkością obrotową, więc siła odśrodkowa równa wszędzie

$= \omega^2 R \qquad \omega^2 R \underbrace{a\cos\theta}_{x}$

Potencjał odpowiedni: ~~$\omega^2(R - a\cos\theta)$~~

$$U = \frac{-M}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\theta}} + \frac{\omega^2 R\, a\cos\theta}{R^2} = \frac{M}{R}\left[1 + \frac{a\cos\theta}{R} + \frac{a^2}{2R^2} + \frac{3}{2}\frac{a^2\cos^2\theta}{R^2} - \frac{a}{R}\cos\theta\right]$$

$$= \frac{a^2 M}{2R^3}\left[1 - 3\cos^2\theta\right]$$

☾ $\frac{M}{R^3}$

⊙

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{b^2} + \cos^2\varphi\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)}$$

$$= \frac{b^2}{1 - \frac{e^2}{a^2}\cos^2\varphi} \neq b^2\left(1 + \frac{e^2}{a^2}\cos^2\varphi\right)$$

$$= a^2\left(1 - \frac{e^2}{4}\sin^2\varphi\right)$$

~~$U + g\frac{a}{R}$~~ $\quad f = \frac{a^2}{r^2} g$

$U + g\frac{a^2}{r} = const$

$\frac{a^2 M}{2R^3}(1 - 3\cos^2\theta) + g\frac{a^2}{r} = const$

$g\frac{a^2}{a+z} = ga\left(1 - \frac{z}{a}\right)$

$\frac{a^2 M}{2R^3}(1 - 3\cos^2\theta) + ga\left(1 - \frac{z}{a}\right) = \frac{a^2 M}{2R^3} + ga$

$gz = 3\frac{a^2 M}{2R^3}\cos^2\theta$

$z = \frac{3a^2 M}{2R^3 g}\cos^2\theta$

~~$\kappa\frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R$~~

~~$\frac{M}{R^3} = \omega^2 =$~~

$\frac{m_☾}{m_♁} = \frac{7.5}{597.9} \neq \frac{1.25}{100} \neq \frac{1}{80}$

$\frac{m_⊙}{m_♁} = \frac{200 \cdot 10^4}{6} = \frac{1}{3}\cdot 10^6$

$\frac{m_⊙}{m_☾} = \frac{8}{3}\cdot 10^7$

$\frac{R_⊙}{R_☾} = \frac{1500}{3.85} = 390$

1761
5855
5906

17718

$\frac{\frac{1}{3}\cdot 10^6 \cdot 80}{(390)^3} = \frac{8}{3}\cdot\frac{10^7}{(3.9)^3\, 10^6} = \frac{80}{3\cdot 59} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \neq \frac{1}{2}$

$\frac{75\cdot 10^{18}\cdot 10^6 \quad 3}{(60)^2\, 2\cdot 10^3\cdot 3.85\cdot 10^{10}}$

$= \frac{3\cdot 7.5\cdot 10^{25}}{2\cdot 3.85\cdot 3.6\cdot 10^{16}}\cdot 6.6\cdot 10^{-8} = \frac{\frac{9}{4}\, 10^2\cdot 2}{2\cdot 4} = \frac{9}{8}\cdot 10^2 \neq 1m$

Tide generating forces

½ dniowa
1 dniowa okresowość } dzień słoneczny, księżycowy

oprócz tego takie względny dłuż. ost względem [illegible]

½ miesięczna okresowość
½ roczna "

Spring, neap-tides

Rigidity of earth, impossibility of thin shell   Precession, Nutation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad x=l: \ \frac{\partial \xi}{\partial x} = D \sin \gamma t \qquad x=0: \ \xi = 0$$

$$\xi = \Sigma (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t)(M \cos \beta x + N \sin \beta x)$$

$$\Sigma (A \cos \alpha t + B \sin \alpha t) \beta \cos \beta l = D \sin \gamma t$$

$$\alpha = \gamma \qquad A = D$$

opis tego wymaga [illegible] Fourier

Wahadło z siłą period. dział. (dekorum)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x + M \sin \gamma t$$

$$x = A \cos \alpha t + N \sin \gamma t$$

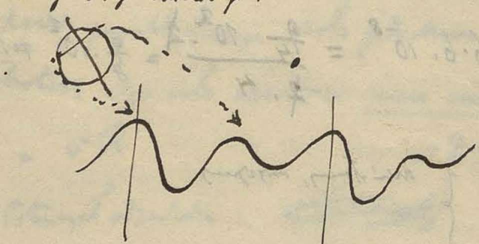
$$-A(\alpha^2 - k^2) \cos \alpha t = \sin \gamma t \left[M - k^2 N + \gamma^2 N\right]$$

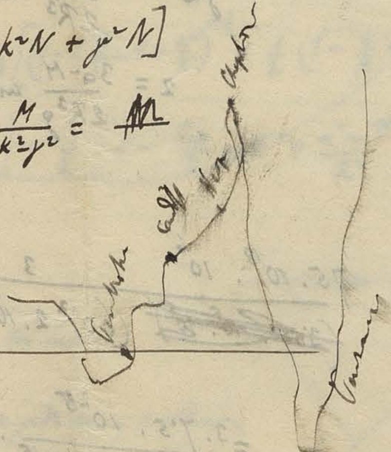
$$\alpha = k \qquad N = \frac{M}{k^2 - \gamma^2}$$

$$x = A \sin kt + \frac{M}{k^2 - \gamma^2} \sin \gamma t$$

Resonancya!

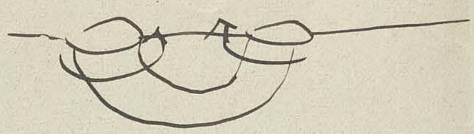
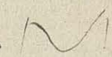
Wahania koło równowagi:





	h					
Solly	2.54	1				
Poznań	5.34	6.3				
[illegible]	5.24	7.5	12.1	12.1		15.0

więc wir nie może mieć początku lub końca w cieczy tylko albo w sobie zamknięty albo w powierzchni

wiosło :    części linii powierzchni z prędk 

Z dawniejszem : natężenie wiru pozostaje niezmienne z czasem

Jeśli jednak obwód na powierzchni wiru (zewnętrznej) to $\int = 0$ więc i to mimo powstać tak samo

więc powierzchnia ciągle utworzona przez linie wirowe.

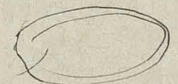
Więc cząsteczki które należą do wiru zawsze na nim pozostaną, które zaś nie nigdy

będą wirować etc

Można teraz powiedzieć : natężenie = suma wirów zawartych w obszarze

Kończą się w powierzchni albo zamknięte → obręcze wirowe

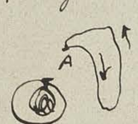
N. p. wiry prostoliniowe (w dwu wymiarach)



$\xi = \eta = 0$

ζ

Zewnątrz jednak będzie istniał potencyał bo



tam prąd niezależny od drogi z wyjątkiem jeśli otoczy obwód

więc φ ale wielowartościowe

tak samo jak w (elektro)magnetyzmie

tam gdzie płynie prąd   nie ma potencyału sił   tylko potencyał wektorowy

jest wir   prędkości

Zewnątrz -- jest pot. sił wielowartościowy

Oprócz tego wiru pozostaje jak poznaliśmy:

Jeśli w $w = \frac{k}{r^2}$ $u = -y\frac{k}{r^2}$ $v = \frac{xk}{r^2}$

cząstki wewnętrzne zostaną stałe to będziemy mieli wir w środku ; to prędkość obwodowa będzie $\frac{k}{r}$

a powierzchnia $q = 2\pi r$ więc natężenie = $k\pi$

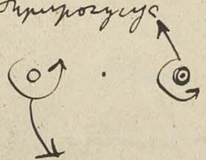
Potencyał etc.

w środku $u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ $v = +\frac{\partial\psi}{\partial x}$ $\psi = \frac{1}{\pi}\iint \xi \lg r \, dx\,dy$

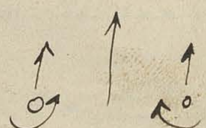
zewnątrz $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ $\varphi = \lg r \overbrace{\frac{1}{\pi}\iint \xi \, dx\,dy}^{k}$

---

2 wiry proste Superpozycya



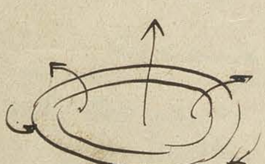
obracają się koło środka masy



wędrują w kierunku ⊥

tak samo jeden wir wzdłuż ściany etc.

Obręcze wirowe



wędrują z prędkością v w kierunku ⊥ która jednak mała w porównaniu z prędkością cieczy wewnątrz

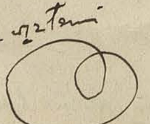
Zewnątrz istnieje potencyał wielowartościowy (funkcye eliptyczne)

2 obręcze w tym samym / przeciwnym kierunku obręcz do ściany

~~Spotkanie~~ Atomy Thomsona

Spotkanie między wirami J. J. Thomson ; teorya grawitacyi Hicksa (wiry proste)

wiry z węzłami



etc.

Jeśli jednak wiry rozmieszczone w całej przestrzeni to wogóle $u = \Sigma$
$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}$ etc. ; częściowo linie prędk. zamknięte częściowo nie

~~Zatem~~ tak samo w elektryczności wogóle ogólny rozkład funkcyi miejsca.

Oznaczone zadanie jeśli dane wiry i ~~warunki~~ prędkości normalne granicy (a w nieskończoności zwartej przestrzeni także jeszcze periody)

Teilchen infolge Anwesenheit des flüssigen Zwischenmediums aufeinander hydrodynamische Fernkräfte ausüben müssen. Svedbergs Versuche müssen unter anderem auch zur Warnung dienen, daß man bei Berechnung der Avogadroschen Zahl nach der Perrinschen Methode nur sehr verdünnte Emulsionen benutzen darf.

§ 10. Wenn es sich nicht um ultramikroskopische Teilchen, sondern um eigentliche Moleküle handelt, welche man nicht zählen kann, haben wir doch noch ein indirektes Mittel, um jene Ungleichförmigkeiten der Dichte und ganz analog auch die Ungleichförmigkeiten der Konzentration gemischter Gase oder Flüssigkeiten zu erkennen: das Tyndallsche Opaleszenzphänomen, hervorgerufen durch die mit den Dichteänderungen verbundenen Unterschiede des Brechungsexponenten.

Für den scheinbaren Absorptionskoeffizienten eines gasförmigen oder flüssigen Mediums, welcher mit dessen Opaleszenzvermögen eng zusammenhängt, erhalten wir durch Kombination der bekannten, von Lord Rayleigh abgeleiteten Formel für trübe Medien mit der Formel (7) und der Lorentzschen Relation zwischen Dichte und Brechungsindex in ganz einfacher, wenn auch nicht von Bedenken freier Weise die Formel[1])

$$h = \frac{8}{27}\frac{H\Theta}{N}\frac{\pi^3(n^2-1)^2(n^2+2)^2}{\lambda^4}\left(-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial p}\right), \qquad (9)$$

deren Ableitung von Einstein durch eine sehr scharfsinnige explizite Berechnung der elektromagnetischen Wellenstrahlung bestätigt worden ist. Dieselbe wird für ein ideales Gas identisch mit der Formel, durch welche Lord Rayleigh die blaue Farbe des Himmels erklärte, indem er die heute wohl nicht mehr zu haltende Annahme machte, daß die Moleküle der Luft solche Diffraktionserscheinungen hervorrufen, als ob sie leitende Kugeln wären. Andererseits erklärt sie das Auftreten der auffallenden Opaleszenzerscheinungen, welche Gase bei Annäherung an den kritischen Punkt aufweisen, und ebenso auch die Opaleszenz binärer Flüssigkeitsgemische bei Annäherung an den sogenannten kritischen Trennungspunkt. Sie ist auch bis zu einem gewissen Grade quantitativ bestätigt worden, und zwar für den ersteren Fall durch die Messungen von Kusom und Kamerlingh Onnes, für den zweiten Fall durch Friedländer vor Jahren angestellte Versuche, welche kürzlich Wo. Ostwald von diesem Standpunkt aus diskutiert hat.

§ 11. Im kritischen Punkt selber tritt eine andere Art Gleichgewicht ein, indem hier die Ausdrücke $\frac{\partial p}{\partial v}$ und $\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}$ Null werden, somit die Verdichtungsarbeit $\chi(\delta)$ proportional wird der vierten Potenz der Verdichtung δ^4, und im Mittel

---

9) Vergl. M. v. Smoluchowski, loc. cit. 7); ferner: Phil. Mag. **22**, [illegible], 1912; A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1275, 1910; H. Kamerlingh Onnes u. W. H. Kusom, Comm. fr. Phys. Leyden Nr. 104, S. 15, 1908; W. H. Kusom,